4 ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS

Página 88

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

1. ***Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos. Ante un saco de almendras, el dueño les dijo: —Coged las que queráis.***

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- ***¿Cómo se llama el hijo de Antonio?***
- ***¿Y el de Juan?***
- ***¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?***

Las claves para resolver este problema son:

a) Cada persona se lleva un número de almendras que es cuadrado perfecto:

$$x \text{ puñados} \rightarrow x^2 \text{ almendras}$$
$$y \text{ puñados} \rightarrow y^2 \text{ almendras}$$

b) La diferencia de almendras que cogen cada padre y su hijo es de 45.

$$x^2 - y^2 = 45 \quad \rightarrow \quad (x + y)(x - y) = 45$$

(Recuerda: *suma por diferencia* es igual a *diferencia de cuadrados*.)

Tenemos, por tanto, el producto de dos números naturales igual a 45. Esto solo ocurre en los siguientes casos:

$$9 \times 5$$
$$15 \times 3$$
$$45 \times 1$$

- **1$^{\underline{er}}$ caso: 9×5**

  $(x + y)(x - y) = 45$

  $x + y = 9$

  $x - y = 5$

  Sumando: $2x = 14 \rightarrow x = 7$

  Restando: $2y = 4 \rightarrow y = 2$

  Solución: $x = 7, \; y = 2$

Interpreta esta solución, estudia los demás casos y resuelve, finalmente, el problema completo.

- 2-º caso: 15×3

  $(x + y)\,(x - y) = 45$

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \;\rightarrow\; x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \;\rightarrow\; y = 6 \end{array}$$

  Esto significa que otro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

- 3er caso: 45×1

  $(x + y)\,(x - y) = 45$

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \;\rightarrow\; x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \;\rightarrow\; y = 22 \end{array}$$

  Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados y José 6.
- Juan coge 23 puñados y Julio 22.
- Pablo se lleva 7 puñados y Luis 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Página 89

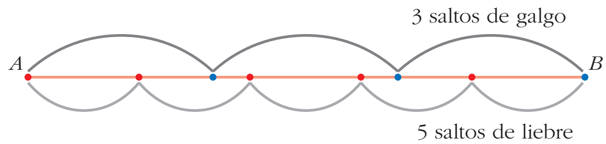
Problema 2

2. ***Un galgo persigue a una liebre.***

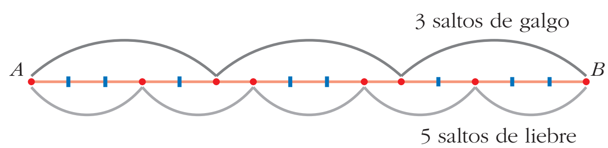
La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre. ¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Este problema parece difícil. Sin embargo, si realizamos una buena representación y elegimos adecuadamente la unidad, puede ser muy sencillo. Veámoslo.

Se nos dice que tres saltos de galgo coinciden con cinco saltos de liebre. Lo representamos:



Parece razonable tomar como unidad de longitud, *u*, la quinceava parte del segmento *AB*.



Así, tendremos:

- **1 salto de galgo = 5*u***
- **1 salto de liebre = 3*u***

"Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres" significa:

- **galgo → $2 \cdot 5u = 10u$**
- **liebre → $3 \cdot 3u = 9u$**

El galgo avanza 1*u* más que la liebre.

"La liebre lleva 30 de sus saltos al galgo": $30 \cdot 3u = 90u$

Razonando de esta forma, completa la resolución del problema.

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada 2 · 2 saltos de galgo y 3 · 2 de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada 2 · 3 saltos de galgo y 3 · 3 de liebre se acerca 3 u el galgo.

… …

Cada 2 · 90 saltos de galgo y 3 · 90 de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

2 · 90 = 180 saltos el galgo

3 · 90 = 270 saltos la liebre

De esta forma el galgo recorre 180 · 5 u = 900 u; y la liebre 270 · 3 u = 810 u.

Como tenía 90 de ventaja: 810 + 90 = 900 u

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos y la liebre 270.

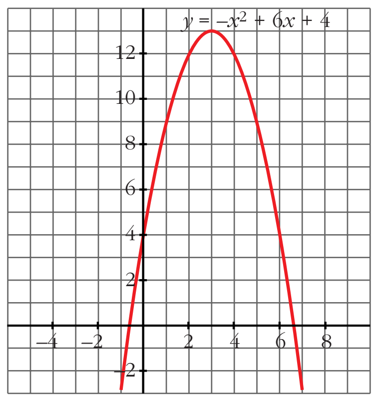
Página 91

1. Representa estas parábolas:

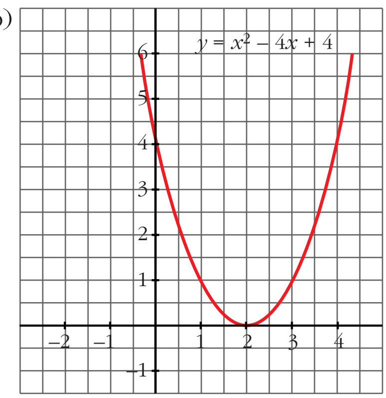
a) $y = -x^2 + 6x + 4$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

a)



b)



2. Representa:

a) $y = 2x^2 - 5x + 6$

b) $y = -2x^2 + 2x - 3$

a) $y = 2x^2 - 5x + 6$

- Vértice: Abscisa $x_0 = \frac{5}{4} = 1{,}25$

  Ordenada $f(1{,}25) = 2{,}875$

- Puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	24	13	6	3	4	9

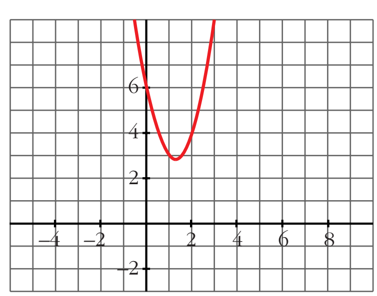
- Cortes con los ejes:

  – Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $2x^2 - 5x + 6 = 0$ $\rightarrow$ No tiene solución

  $\rightarrow$ no corta al eje X.

  – Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 6$ $\rightarrow$ Punto (0, 6).

- Gráfica:



b) $y = -2x^2 + 2x - 3$

- Vértice: Abscisa $x_0 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

  Ordenada $f(0{,}5) = -2{,}5$

- Puntos próximos al vértice:

x	-2	-1	0	1	2
y	-15	-7	-3	-3	-7

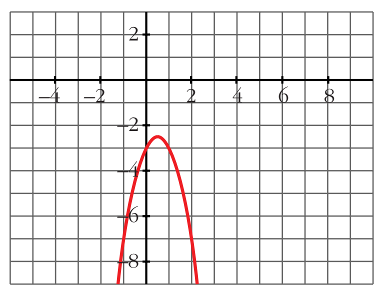
- Cortes con los ejes:

  – Con el eje $X \to y = 0 \to -2x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{-4}$

  $\to$ no tiene solución $\to$ no corta al eje X.

  – Con el eje $Y \to x = 0 \to y = -3 \to$ Punto $(0, -3)$.

- Gráfica:



Página 92

1. Resuelve:

a) $\mathbf{4x^2 - 5x = 0}$ **b)** $\mathbf{4x^2 + 9 = 0}$

a) $4x^2 - 5x = 0 \to x(4x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/4 \end{cases}$

$x_1 = 0,\ x_2 = 5/4$

b) $4x^2 + 9 = 0 \to$ No tiene solución.

2. Resuelve:

a) $\mathbf{3x^2 - 27 = 0}$ **b)** $\mathbf{4x^2 - 9 = 0}$

a) $3x^2 - 27 = 0 \to x^2 = 9 \to x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $4x^2 - 9 = 0 \to 4x^2 = 9 \to x^2 = \frac{9}{4} \to x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = -\frac{3}{2}$

Página 93

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathbf{x^4 - 29x^2 + 100 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 18x^2 + 81 = 0}$

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0; \quad z = x^2$

$z^2 - 29z + 100 = 0$

$$z = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2} = \begin{cases} z = 25 \to x = \pm 5 \\ z = 4 \to x = \pm 2 \end{cases}$$

$x_1 = 2, \; x_2 = -2, \; x_3 = 5, \; x_4 = -5$

b) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0; \quad z = x^2$

$z^2 - 18z + 81 = 0$

$$z = \frac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \to x = \pm 3$$

$x_1 = 3, \; x_2 = -3$

2. Resuelve:

a) $\mathbf{\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = x + 3}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 1 = x - 3}$

a) $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = x + 3$. Elevamos al cuadrado:

$2x^2 + 3x + 5 = x^2 + 6x + 9$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 1 = x - 3$

$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = x - 4$

$x^2 - 5x + 4 = x^2 + 16 - 8x$

$3x = 12$

$x = 4$

Página 94

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathbf{x^3 - 7x^2 + 3x = 0}$ **b)** $\mathbf{x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0}$

a) $x^3 - 7x^2 + 3x = 0$

$$x(x^2 - 7x + 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{2} \begin{cases} x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{2} \\ x_3 = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

$x_1 = 0, \; x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{2}, \; x_3 = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{2}$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0$

$x_1 = 2,\ \ x_2 = 3,\ \ x_3 = -3$

2. Resuelve:

a) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0$ **b)** $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$

a) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0 \ \rightarrow\ x(x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0$

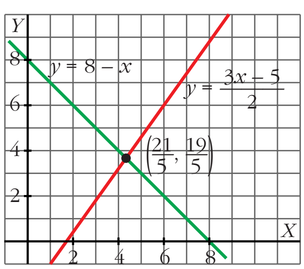
$$x(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

b) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$

$$(x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Página 95

1. Interpreta gráficamente: $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y - 5 = 0} \\ \mathbf{x + \ y - 8 = 0} \end{cases}$

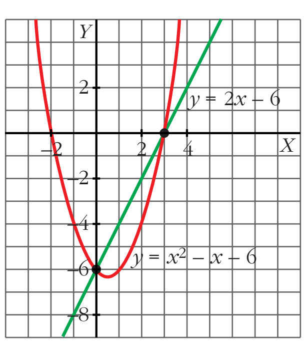


Sistema compatible.

Son dos rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{21}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

El sistema tiene una solución: $x = \frac{21}{5},\ \ y = \frac{19}{5}$

2. Interpreta gráficamente: $\begin{cases} \mathbf{y = x^2 - x - 6} \\ \mathbf{2x\ - y - 6 = 0} \end{cases}$



Sistema compatible.

Tiene dos soluciones, pues la recta y la parábola se cortan en dos puntos.

Los puntos son (0, –6) y (3, 0), luego las soluciones son:

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = -6,\ \ x_2 = 3,\ \ y_2 = 0$$

Página 97

1. Resuelve:

a) $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ \sqrt{4 + x - y} + x = y - 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{y} = 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + 3 = 0 \\ \sqrt{4 + x - y} + x = y - 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3y - 3 \\ \sqrt{4 + 3y - 3 - y} + 3y - 3 = y - 2 \end{array}$

$\sqrt{1 + 2y} = 1 - 2y; \quad 1 + 2y = 1 + 4y^2 - 4y; \quad 0 = 4y^2 - 6y$

$y\,(4y - 6) = 0 \begin{cases} y = 0 \quad \to \quad x = -3 \ \text{ (sí vale)} \\ y = 6/4 = 3/2 \quad \to \quad x = 3/2 \ \text{ (no vale)} \end{cases}$

Solución: $x = -3, \ y = 0$

b) Sustituimos la segunda ecuación en la primera: $\dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x - 2} = 4$

Multiplicamos por $x(x - 2)$:

$3(x - 2) + x^2 = 4x(x - 2) \ \to \ 3x^2 - 11x + 6 = 0 \ \to \ x_1 = 3, \ x_2 = 2/3$

Soluciones: $x_1 = 3 \ \to \ y_1 = 1$

$x_2 = 2/3 \ \to \ y_2 = -4/3$

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \left.\begin{array}{r} x + z = 4 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\} \end{cases} \begin{array}{l} x = 3 - y \\ \left.\begin{array}{l} 3 - y + z = 4 \\ 2(3 - y) + y = 4 \end{array}\right\} \end{array} 6 - 2y + y = 4 \ \to \ y = 2 \ \to \ x = 1$

$z = 4 - x$

$z = 3$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 5 - x \\ x + 5 - x - \dfrac{5 - x}{x} = 1 \ \to \ 5 - \dfrac{5 - x}{x} = 1 \end{array}$

$5x - 5 + x = x \ \to \ 5x = 5 \ \to \ x = 1 \ \to \ y = 4$

Solución: $x = 1, \ y = 4$

Página 98

1. Resuelve:

a) $3x + 2 \le 10$

b) $x > 6$

a) $x \le 8/3$

b) $\{x / x > 6\} = (6, +\infty)$

2. **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2 \le 10} \\ \mathbf{x - 5 > 1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{2x - 5 \ge 6} \\ \mathbf{3x + 1 \le 15} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x \le 8 \ \rightarrow \ x \le 8/3 \\ x > 6 \end{array}\right\}$ No tiene solución

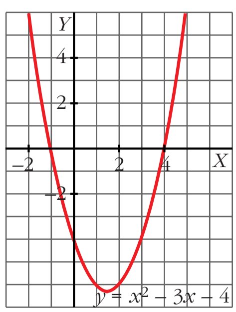
b) $\left.\begin{array}{l} 2x \ge 11 \ \rightarrow \ x \ge 11/2 \\ 3x \le 14 \ \rightarrow \ x \le 14/3 \end{array}\right\}$ No tiene solución

Página 99

3. **Resuelve las siguientes inecuaciones y sistemas:**

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 4 < 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 3x - 4 \ge 0}$

a)



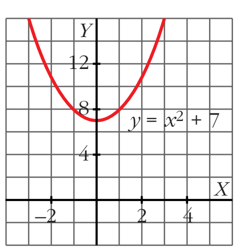
$x^2 - 3x - 4 < 0 \ \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \ \rightarrow \ (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

4. **Resuelve:**

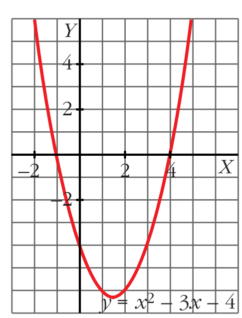
a) $\mathbf{x^2 + 7 < 0}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x^2 - 3x - 4 \ge 0} \\ \mathbf{2x - 7 > 5} \end{cases}$

a)



$x^2 + 7 < 0 \ \rightarrow$ No tiene solución

b)



$2x - 7 > 5 \ \rightarrow \ 2x > 12 \ \rightarrow \ x > 6 \ \rightarrow$

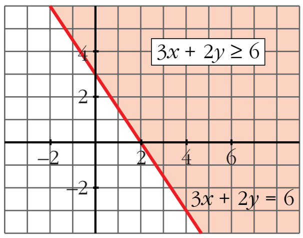
$\rightarrow \ (6, +\infty)$

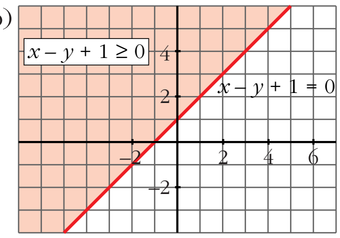
$x^2 - 3x - 4 \ge 0 \ \rightarrow \ (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

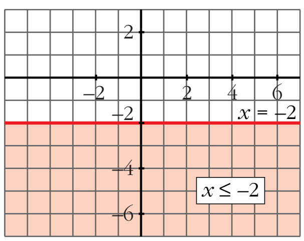
Página 100

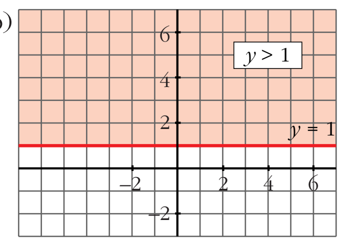
1. Resuelve: a) $3x + 2y \geq 6$ **b) $x - y + 1 \geq 0$**

a)


b)


2. Resuelve: a) $x \leq -2$ **b) $y > 1$**

a)


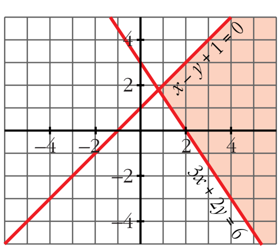
b)


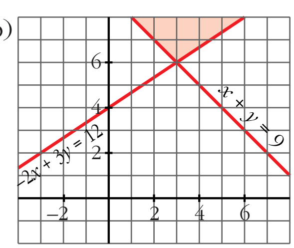
Página 102

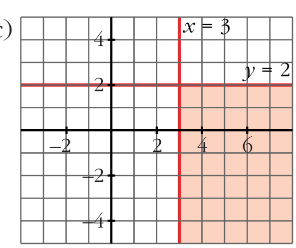
1. Resuelve:

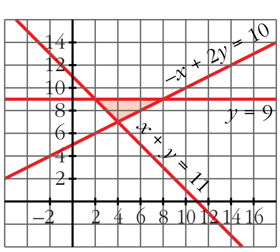
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \geq 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

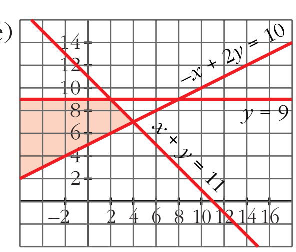
d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$

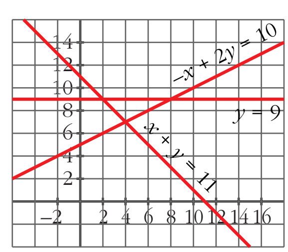
a)


b)


c)


d)


e)


f)


No hay solución.

Página 106

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ecuaciones

1 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución:**

a) $\frac{x^2}{3} - 2 = 3x + \frac{x^2 - 12}{6}$

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$

c) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) = 2 - 3x$

d) $(2x + 1)^2 = 1 + (x + 1)(x - 1)$

e) $3x(x + 4) - x(x - 1) = 15$

f) $\frac{x}{3}(x - 1) - \frac{x}{4}(x + 1) + \frac{3x + 4}{12} = 0$

a) $\frac{x^2}{3} - 2 = 3x + \frac{x^2 - 12}{6}$

$2x^2 - 12 = 18x + x^2 - 12$

$x^2 - 18x = 0$

$x(x - 18) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 18$

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} = 1 - \frac{x + 7}{12}$

$4x^2 + 8 - (3x^2 + 3) = 12 - (x + 7)$

$x^2 + 5 = 12 - x - 7$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = -1$

c) $x(x - 3) + (x + 4)(x - 4) = 2 - 3x$

$x^2 - 3x + x^2 - 16 = 2 - 3x$

$2x^2 = 18$

$x_1 = 3, \ x_2 = -3$

d) $(2x + 1)^2 = 1 + (x + 1)(x - 1)$

$4x^2 + 1 + 4x = 1 + x^2 - 1$

$3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4 + 2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-4 - 2}{6} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -\dfrac{1}{3}, \ x_2 = -1$

e) $3x(x + 4) - x(x - 1) - 15$

$3x^2 + 12x - x^2 + x = 15$

$2x^2 + 13x - 15 = 0$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13 + 17}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-13 - 17}{4} = \dfrac{-15}{2} \end{cases}$$

$x_1 = 1, \ x_2 = -\dfrac{15}{2}$

f) $\dfrac{x}{3}(x - 1) - \dfrac{x}{4}(x + 1) + \dfrac{3x + 4}{12} = 0$

$\dfrac{x^2 - x}{3} - \dfrac{x^2 + x}{4} + \dfrac{3x + 4}{12} = 0$

$4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}; \ x = 2$

2 **Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:**

a) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

b) $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{2} - \dfrac{x^2 + 3x}{4} = \dfrac{x^2 - 4x + 15}{6}$

c) $\dfrac{3x + 1}{3} - \dfrac{5x^2 + 3}{2} = \dfrac{x^2 - 1}{2} - \dfrac{x + 2}{3}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{1}{2}\left[x^2 - 2 - \dfrac{1}{2}x\right] = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

a) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$6x - 3 = 2x^2 + 6x - 11$

$8 = 2x^2$

$x_1 = 2, \ x_2 = -2$

b) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x(x - 13) = 0$

$x_1 = 0, \;\; x_2 = 13$

c) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x$

$2x(9x - 4) = 0 \; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1 - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x^2 - 5}{4}$

$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$

$4x^2 - x = 0$

$x(4x - 1) = 0 \; \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \;\to\; x_2 = 1/4 \end{cases}$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(3x + 1)(2x - 3) - (x - 3)(6x + 4) = 9x$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{4} - \dfrac{2}{3}(x + 1) = \dfrac{(2x - 3)^2 - (13x - 5)}{16}$

c) $\dfrac{1}{6}\left[(13 - 2x) - 2(x - 3)^2\right] = -\dfrac{1}{3}(x + 1)^2$

d) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

e) $0{,}5\,(x - 1)^2 - 0{,}25\,(x + 1)^2 = 4 - x$

f) $(0{,}5x - 1)(0{,}5x + 1) = (x + 1)^2 - 9$

a) $6x^2 - 9x + 2x - 3 - 6x^2 - 4x + 18x + 12 = 9x$

$2x = 9$

$x = \dfrac{9}{2}$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{4} - \dfrac{(2x + 2)}{3} = \dfrac{4x^2 + 9 - 12x - 13x + 5}{16}$

$12x^2 - 12 - 32x - 32 = 12x^2 + 27 - 36x - 39x + 15$

$-44 - 32x = 42 - 75x$

$43x = 86$

$x = 2$

c) $\frac{1}{6}(13 - 2x - 2x^2 - 18 + 12x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

$\frac{1}{6}(-2x^2 + 10x - 5) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

$-\frac{2x^2}{6} + \frac{10x}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

$-2x^2 + 10x - 5 = -2x^2 - 2 - 4x$

$14x = 3$

$x = \frac{3}{14}$

d) $2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$

$5x^2 - 24x + 16 = 0$

$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{10}$

$x = \frac{24 \pm 16}{10} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/5 \end{cases}$

e) $\frac{1}{2}(x^2 + 1 - 2x) - \frac{1}{4}(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = 4 - x$

$2x^2 + 2 - 4x - x^2 - 1 - 2x = 16 - 4x$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

f) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = x^2 + 1 + 2x - 9$

$\frac{x^2}{4} - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$

$x^2 - 4 = 4x^2 + 4 + 8x - 36$

$0 = 3x^2 + 8x - 28$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -14/3 \end{cases}$

4 **Comprueba que estas ecuaciones son de primer grado y que una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas:**

a) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x + 0{,}6 - 0{,}25(x-1)^2 = 1{,}25x - (0{,}5x + 2)^2$

c) $\mathbf{(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)}$

d) $\mathbf{\dfrac{2x+1}{7}-\dfrac{(x+1)(x-2)}{2}=\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{2}}$

a) $x^2+1+2x-8-8x=x^2+1-2x-8-4x$

$0=0$

Tiene infinitas soluciones.

b) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{(x^2+1-2x)}{4}=\dfrac{5x}{4}-\dfrac{x^2}{4}-4-2x$

$4x+12-5x^2-5+10x=25x-5x^2-80-40x$

$29x=-87$

$x=-\dfrac{87}{29}$

$x=-3$

c) $25x^2+9-30x-20x^2+25x=5x^2-5x$

$9=0$

No tiene solución.

d) $4x+2-7x^2+14x-7x+14=7x-14-7x^2-28+28x$

$-7x^2+11x+16=-7x^2+35x-42$

$x=\dfrac{58}{24}=\dfrac{29}{12}$

5 **Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Búscalas y resuelve las otras.**

a) $\mathbf{x+2+3x^2=\dfrac{5x^2+6x}{2}}$

b) $\mathbf{(x+2)^2-3=4x}$

c) $\mathbf{(x+4)^2-(2x-1)^2=8x}$

d) $\mathbf{2(2-x)(3x+1)-(1-2x)(x+3)+24=0}$

e) $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\dfrac{x+1}{5}=0}$

a) $2x+4+6x^2=5x^2+6x$

$x^2-4x+4=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$

$x=2$

b) $x^2 + 4 + 4x - 3 = 4x$

$x^2 + 1 = 0$

No tiene solución.

c) $x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x = 8x$

$0 = 3x^2 - 4x - 15$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5/3 \end{cases}$$

d) $12x + 4 - 6x^2 - 2x - x - 3 + 2x^2 + 6x + 24 = 0$

$-4x^2 + 15x + 25 = 0$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{-8} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5/4 \end{cases}$$

e) $x^2 + 1 - 2x - 3x + 1 + 3x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

No tiene solución.

6 **Resuelve: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$**

Es una ecuación bicuadrada. Haz $x^2 = z$.

$x^2 = z$

$4z^2 - 17z + 4 = 0$

$$z = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \quad \begin{cases} z_1 = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z_2 = \dfrac{1}{4} & \begin{cases} x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

7 **Resuelve: $9x^4 - x^2 = 0$**

Aunque es una ecuación bicuadrada, es más eficaz resolverla sacando factor común.

$$x^2(9x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{9} \to x_2 = \dfrac{1}{3}, \quad x_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

8 **Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

b) $x^2 = z$

$z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \quad \text{(no vale)} \\ z = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^2 = z$

$z^2 + 3z + 2 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \begin{cases} z = -2 \quad \text{(no vale)} \\ z = -1 \quad \text{(no vale)} \end{cases} \quad \text{(no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$z^2 - 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \begin{cases} z = 8 \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

9 **Resuelve y comprueba las soluciones:**

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

c) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$ **d)** $x^4 - 4x^2 = 0$

a) $x^2 = z$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \begin{cases} z = 9 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \\ z = 1 \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

b) $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{2} \quad \text{(no tiene solución)}$$

c) $x^2 = z$

$9z^2 - 46z + 5 = 0$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 180}}{18} \begin{cases} z = 90/18 = 5 \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \\ z = 2/18 = 1/9 \begin{cases} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

d) $x^2(x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0, \;\; x_2 = 2, \;\; x_3 = -2$

10 **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2 - 1)(x^2 + 3) - (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 4x^2$

a) $2x^4 - 6x^2 + x^2 - 3 = x^4 - x^2 + x^2 - 1 - 8$

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$x^2 = z$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} z = 3 \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \\ z = 2 \begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) $\frac{3x^4 + 9x^2 - x^2 - 3}{4} - 2x^4 + 6x^2 - x^2 + 3 = 4x^2$

$3x^4 + 8x^2 - 3 - 8x^4 + 20x^2 + 12 = 16x^2$

$-5x^4 + 12x^2 + 9 = 0$

$x^2 = z$

$$z = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{-10} \begin{cases} z = -3/5 \;\; \text{(no vale)} \\ z = 3 \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Página 107

11 **Resuelve:** $x - \sqrt{2x - 1} = 1 - x$

Deja el radical solo en un miembro y después eleva al cuadrado.

$2x - 1 = \sqrt{2x - 1}$

$(2x - 1)^2 = 2x - 1$

$4x^2 + 1 - 4x = 2x - 1$

$4x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{8} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

12 **Resuelve:** $\sqrt[3]{x^2 - 28} + 3 = 0$

☛ ***Aísla el radical y eleva al cubo.***

$\sqrt[3]{x^2 - 28} = -3;\ \ x^2 - 28 = -27,\ \ x^2 = 1 \ \rightarrow\ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1$

13 **Resuelve:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5x + 14}} = \dfrac{1}{7}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{13 - 5x}} = -1$

a) $7 = \sqrt{5x + 14} \ \Rightarrow\ 49 = 5x + 14 \ \Rightarrow\ 35 = 5x \ \Rightarrow\ x = 7$

b) $-3 = \sqrt[3]{13 - 5x} \ \Rightarrow\ -27 = 13 - 5x \ \Rightarrow\ 5x = 40 \ \Rightarrow\ x = 8$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$ **b)** $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$ **d)** $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$4x^2 + 7x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8}$ $\begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$ $\begin{cases} x = 2 \ \ \text{(no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$

c) $2 - 5x = \left(-x\sqrt{3}\right)^2$

$2 - 5x = x^2 \cdot 3$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$ $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \ \ \text{(no vale)} \end{cases}$

d) $\left(\sqrt{5x - 6}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{2x}\right)^2$

$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$\left(8\sqrt{2x}\right)^2 = (-3x + 22)^2$

$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$

$128x = 9x^2 + 484 - 132x$

$0 = 9x^2 - 260x + 484$

$x = \dfrac{260 \pm \sqrt{67\,600 - 17\,424}}{18}$ $\begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \ \ \text{(no vale)} \\ x = 2 \end{cases}$

15 **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{3x+4}+2x-4=0$ **b)** $x-\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{5x+6}-3=2x$ **d)** $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}=0$

e) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3-x}=0$

a) $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=(4-2x)^2$

$3x+4=16+4x^2-16x$

$4x^2-19x+12=0$

$$x=\frac{19\pm\sqrt{361-192}}{8}\begin{cases}x=4 \text{ (no vale)}\\ x=6/8=3/4\end{cases}$$

b) $(x-1)^2=\left(\sqrt{7-3x}\right)^2$

$x^2+1-2x=7-3x$

$x^2+x-6=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\begin{cases}x_1=-3 \text{ (no vale)}\\ x_2=2\end{cases}$$

c) $\left(\sqrt{5x+6}\right)^2=(2x+3)^2$

$5x+6=4x^2+9+12x$

$4x^2+7x+3=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}\begin{cases}x_1=-3/4\\ x_2=-1\end{cases}$$

d) $\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$x^2=1$

$x_1=1,\ x_2=-1$

e) $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2=\left(\sqrt{3-x}\right)^2$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0,\ x_2=-1$

16 **Saca factor común y resuelve:**

a) $5x^3-3x^2=0$ **b)** $x^4+4x^2=0$

c) $4x^3-x=0$ **d)** $2x^4-3x^3=0$

a) $x^2(5x-3)=0$

$x_1=0,\ x_2=\dfrac{3}{5}$

b) $x^2(x^2+4)=0$

$x=0$

c) $x(4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{4} \begin{cases} x_2 = 1/2 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$

d) $x^3(2x - 3) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = \dfrac{3}{2}$

17 **Resuelve las siguientes ecuaciones igualando a cero cada factor:**

a) $(2x - 7)(x + 3)^2 = 0 \begin{cases} 2x - 7 = 0; \; x = \dots \\ (x + 3)^2 = 0; \; x = \dots \end{cases}$

b) $x(x^2 - 4)(3x + 12) = 0$

c) $(x + 2)^2(x - 1)^2 = 0$

d) $3x(x - 2)^3 = 0$

e) $(x - 5)(x^2 + 1) = 0$

a) $x_1 = \dfrac{7}{2}, \; x_2 = -3$

b) $x_1 = 0, \; x_2 = 2, \; x_3 = -2, \; x_4 = -4$

c) $x_1 = -2, \; x_2 = 1$

d) $x_1 = 0, \; x_2 = 2$

e) $x = 5$

18 **Descompón en factores y resuelve:**

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$

f) $-x^3 + 13x - 12 = 0$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 2, \; x_3 = -3$

b) $x^2(x - 1)^2 = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 1$

c) $x(x - 3)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; x_3 = -3$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = -3$

e) $2(x - 1)^2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = \dfrac{1}{2}$

f) $-(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = -4, \; x_2 = 1, \; x_3 = -3$

g) $(x - 1)^2(x - 3) = 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = 3$

h) $(x - 2)(x + 2)^2 = 0$

$x_1 = 2, \; x_2 = -2$

19 **Resuelve la ecuación:**

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$$

☛ ***Multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores: $(x+3)(x-3)$.***

$x^2+3x+2x^2-6x=6$

$3x^2-3x-6=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{6}\quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

20 **Resuelve:** $\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{3x+2}{2x}$

☛ ***Haz producto de medios igual a producto de extremos.***

$4x^2=3x^2+2x+6x+4$

$x^2-8x-4=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64+16}}{2}\quad \begin{cases} x_1=4+2\sqrt{5} \\ x_2=4-2\sqrt{5} \end{cases}$$

21 **Resuelve:**

a) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{4}{x+4}$ **b)** $\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{x+2}{2-x}$

a) $x^2+4x=4x+4$

$x^2=4$

$x_1=2,\ x_2=-2$

b) $6-3x=x^2+3x+2x+6$

$x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$

$x_1=0,\ x_2=-8$

22 **Resuelve:**

a) $\dfrac{x+2}{x}+3x=\dfrac{5x+6}{2}$ **b)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{3}-1$

c) $\dfrac{600}{x}+80=\dfrac{600}{x-2}$ **d)** $\dfrac{8}{x+6}+\dfrac{12-x}{x-6}=1$

a) $2x+4+6x^2=5x^2+6x$

$x^2-4x+4=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$$

$x=2$

b) $3+6+9=x^2-3x$

$x^2-3x-18=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}\quad \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

c) $600x - 1\,200 + 80x^2 - 160x = 600x$

$80x^2 - 160x - 1\,200 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

d) $8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$

$2x^2 - 14x - 60 = 0$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4} \begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

23 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\dfrac{8 - x}{2} - \dfrac{2x - 11}{x - 3} = \dfrac{x + 6}{2}$ **b)** $\dfrac{10}{3} + \dfrac{5 - x}{x + 5} = \dfrac{x + 5}{x - 5}$

a) $8x - 24 - x^2 + 3x - 4x + 22 = x^2 + 6x - 3x - 18$

$2x^2 - 4x - 16 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} \begin{cases} x_1 = (4 + 12)/4 = 4 \\ x_2 = (4 - 12)/4 = -2 \end{cases}$$

b) $10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x = 3x^2 + 15x + 15x + 75$

$4x^2 = 400$

$$x^2 = 100 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

24 **Resuelve estas ecuaciones de grado superior a dos en las que puedes despejar la incógnita:**

a) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$ **b)** $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$

c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x^2} = 0$ **d)** $\dfrac{12}{5x} - \dfrac{3x^3}{20} = 0$

a) $27x^3 + 125 = 0$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-125}{27}}$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

b) $81x^4 - 16 = 0$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$$

$$x_1 = \frac{2}{3},\; x_2 = -\frac{2}{3}$$

c) $x^3 - 2 = 0$

$x = \sqrt[3]{2}$

d) $48 - 3x^4 = 0$

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \pm\sqrt[4]{16} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Página 108

Sistemas de ecuaciones

25 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + \ \ y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$

c $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x$

$2x - 11 + 253x = -11$

$0 = 255x$

$x = 0, \quad y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y$

$y = \dfrac{34}{17}, \quad y = 2$

$x = 0, \quad y = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7; \quad 5y = 5; \quad y = 1$

$x = -1, \quad y = 1$

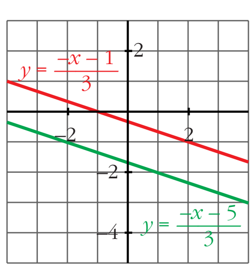
d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x - \ \ y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -2x + 3y = -24 \\ 2x - \ \ y = 8 \\ \hline 2y = -16; \quad y = -8 \end{array}$

$x = 0, \quad y = -8$

26 **Representa gráficamente estos sistemas de ecuaciones y di cuáles no tienen solución:**

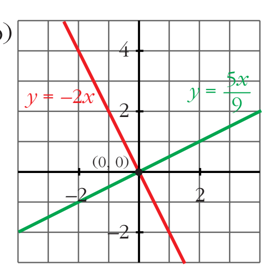
a) $\begin{cases} x - 3y = 2x + 1 \\ 4x + 3y = 3x - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 4 = 4 - y \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 2 = y - 5 \\ 6x + 1 = 2y - 3 \end{cases}$

a)



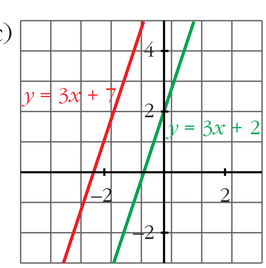
Rectas paralelas.
El sistema no tiene solución.

b)



Las rectas se cortan en (0, 0).
La solución es $x = 0, \quad y = 0$.

c)



Rectas paralelas.
El sistema no tiene solución.

27 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 1 \\[2mm] \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y+3}{4} = 1 \\[2mm] \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{2-y}{6} = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + - 2 + y + 1 = 4 \\ 6x - 3 - 2y - 1 = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + \ \ y = 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{array}$

$2x + y = 5$

$3x - y = 5$

$5x \quad = 10; \ \ x = 2, \ \ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 6 + y + 3 = 4 \\ 3 - 3x - 2 + y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + y = -5 \\ -3x + y = 5 \end{array}$

$2x + y = -5$

$3x - y = -5$

$5x \quad = -10; \ \ x = -2, \ \ y = -1$

28 **Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado:**

a) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y \ = 0 \\ x(x - y) = 2\,(y^2 - 4) \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

a) $x = y - 3$

$(y - 3)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y^2 + 9 - 6y = 5$

$2y^2 - 6y + 4 = 0$

$y = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4}$

$y_1 = 2, \ \ y_2 = 1$

$x_1 = -1, \ \ y_1 = 2, \ \ x_2 = -2, \ \ y_2 = 1$

b) $y = 1 - x$

$x - x^2 + 2 - 2x = 2$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x_1 = 0, \ \ y_1 = 1, \ \ x_2 = -1, \ \ y_2 = 2$

c) $x = -\dfrac{2y}{3}$

$-\dfrac{2y}{3}\left(-\dfrac{2y}{3} - y\right) = 2(y^2 - 4)$

$\dfrac{4y^2}{9} + \dfrac{2y^2}{3} = 2y^2 - 8$

$4y^2 + 6y^2 = 18y^2 - 72$

$8y^2 = 72$

$y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

$x_1 = -2,\ \ y_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ y_2 = -3$

d) $y = 3 - 2x$

$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0$

$3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 + 12x = 0$

$0 = 6x^2 - 15x + 9$

$0 = 2x^3 - 5x + 3$

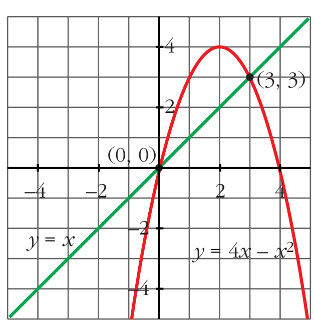
$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \dfrac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{3}{2},\ \ y_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ y_2 = 1$

29 **Interpreta gráficamente estos sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a)



Sistema compatible.

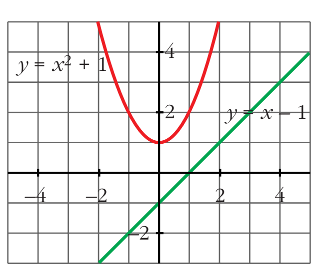
Tiene dos soluciones, pues la recta y la parábola se cortan en dos puntos.

Los puntos son (0, 0) y (3, 3).

Las soluciones serán:

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = 0,\ \ x_2 = 3,\ \ y_2 = 3$$

b)



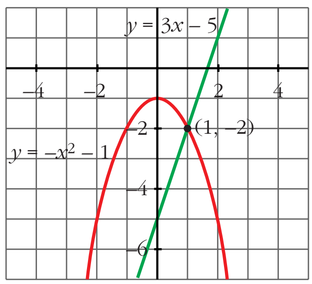
Sistema incompatible.

La recta y la parábola no se cortan, luego el sistema no tiene solución.

30 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} y - 3x = -5 \\ x^2 + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y + x - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = 5 \\ -8x + y = 9 \end{cases}$

a)

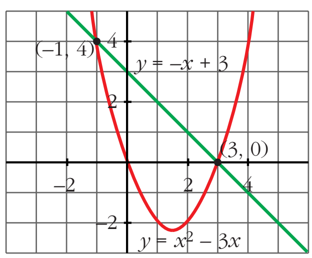


La recta y la parábola se cortan en (1, –2) y en (–4, –17).

Las soluciones del sistema serán:

$$x_1 = 1,\ \ y_1 = -2,\ \ x_2 = -4,\ \ y_2 = -17$$

b)

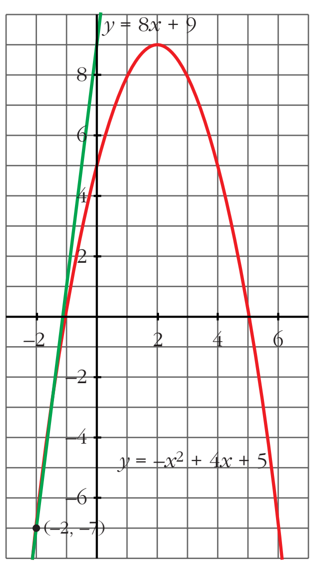


La recta y la parábola se cortan en (3, 0) y en (–1, 4).

Las soluciones del sistema serán:

$$x_1 = 3,\ \ y_1 = 0,\ \ x_2 = -1,\ \ y_2 = 4$$

c)



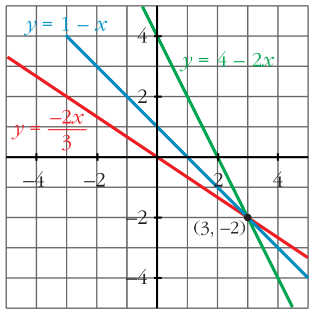
La recta y la parábola se cortan en (–2, –7).

La solución del sistema será:

$$x = -2,\ \ y = -7$$

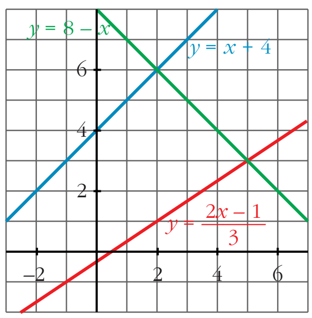
31 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y comprueba la solución del que es compatible:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

a) 

Las tres rectas se cortan en (3, –2).

La solución del sistema será: $x = 3$, $y = -2$.

b) 

No hay ningún punto común a las tres rectas.

El sistema no tiene solución.

32 Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

Despeja una incógnita en una de las ecuaciones y sustitúyela en las otras dos. Así obtendrás un sistema de dos ecuaciones.

a) $\begin{cases} z = 9 - 2y - x \\ x - y - (9 - 2y - x) = -10 \\ 2x - y + 9 - 2y - x = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ x - 3(-2x - 1) = -4 \end{cases}$

$x + 6x + 3 = -4$

$x = -1$, $y = 1$, $z = 8$

b) $\begin{cases} z = 3x + 4y - 3 \\ 3x - 3y + 3x + 4y - 3 = -8 \\ x - y + 6x + 8y - 6 = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x + y = -5 \\ 7x + 7y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -5 - 6x \\ x + y = 0 \end{cases}$

$y = -x$; $-5 - 6x = -x$

$-5x = 5$

$x = -1$, $y = 1$, $z = -2$

33 **Resuelve por sustitución:**

a) $\begin{cases} (x^2+1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} (x^2+1)\,y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 4x \\ (x^2+1)\,16x^2 = 5 \end{array}\right\}$

$16x^4 + 16x^2 - 5 = 0$

$x^2 = \dfrac{-16 \pm 24}{32} = \begin{cases} 1/4 \;\rightarrow\; x = 1/2 \\ -5/4 \;\; \text{(no vale)} \end{cases}$

$x_1 = \dfrac{1}{2},\;\; y_1 = 2,\;\; x_2 = -\dfrac{1}{2},\;\; y_2 = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{array}\right\} y = \dfrac{6}{x};\;\; x^2 - \dfrac{36}{x^2} = 5;\;\; x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$x^2 = \dfrac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \;\rightarrow\; x = \pm 3 \\ -4 \;\; \text{(no vale)} \end{cases}$

$x_1 = 3,\;\; y_1 = 2,\;\; x_2 = -3,\;\; y_2 = -2$

34 **Resuelve por reducción:**

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{array}{r} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ -3x^2 + 6y^2 = -21 \\ \hline y^2 = 9;\;\; y = \pm 3 \end{array}$

$x^2 = 25;\;\; x = \pm 5$

$x_1 = 5,\;\; y_1 = 3;\;\; x_2 = -5,\;\; y_2 = 3;\;\; x_3 = 5,\;\; y_3 = -3;\;\; x_4 = -5,\;\; y_4 = -3$

b) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\dfrac{1}{4} \\ \hline 2x^2 \qquad\qquad = \dfrac{2}{4};\;\; x = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}$

Si $x = \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{4} + y^2 + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{4}$

$1 + 4y^2 + 2y = 3$

$4y^2 + 2y - 2 = 0;\;\; 2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

Si $x = -\frac{1}{2}$: $\quad \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$

$1 + 4y^2 - 2y = 3$

$4y^2 - 2y - 2 = 0; \;\; 2y^2 - y - 1 = 0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{1}{2},\; y_1 = -1;\;\; x_2 = \frac{1}{2},\; y_2 = \frac{1}{2};\;\; x_3 = -\frac{1}{2},\; y_3 = 1;\;\; x_4 = -\frac{1}{2},\; y_4 = -\frac{1}{2}$

35 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 15 \\ x/y = 5/3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 = 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x = y - y^2 \end{array}\right\}$

$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3$

$2x - 3y = 1; \;\; x = \frac{1 + 3y}{2}$

$\frac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2$

$1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2$

$13y^2 - 10y - 3 = 0; \;\; y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{26} = \frac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$

$x_1 = 2,\; y_1 = 1;\;\; x_2 = \frac{2}{13},\; y_2 = -\frac{3}{13}$

b) $x = \frac{28}{y}$

$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65$

$784 + y^4 = 65y^2$

$y^4 - 65y^2 + 784 = 0; \;\; y^2 = z$

$z = \frac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \;\to\; y = \pm 7 \\ 16 \;\to\; y = \pm 4 \end{cases}$

$x_1 = 7,\; y_1 = 4;\;\; x_2 = -7,\; y_2 = -4;\;\; x_3 = 4,\; y_3 = 7;\;\; x_4 = -4,\; y_4 = -7$

c) $x = \dfrac{15}{y}$

$\dfrac{15/y}{y} = \dfrac{5}{3}$

$\dfrac{15}{y^2} = \dfrac{5}{3}$; $45 = 5y^2$; $y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$

$x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5$, $y_2 = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\}$

$\dfrac{16y^2}{9} - y^2 = 7$

$16y^2 - 9y^2 = 63$; $y^2 = 9$

$x_1 = 4$, $y_1 = 3$; $x_2 = -4$, $y_2 = -3$

Página 109

Inecuaciones

36 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\dfrac{3x - 2}{2} \le \dfrac{2x + 7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

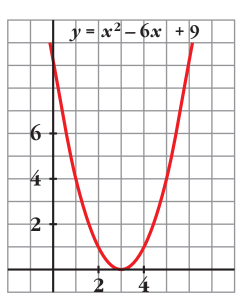
b) $9x - 6 \le 4x + 14 \rightarrow 5x \le 20 \rightarrow x \le 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \rightarrow -14 < 5x \rightarrow x > -\dfrac{14}{5}$; $\left(-\dfrac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \rightarrow -2x > -10 \rightarrow 2x < 10 \rightarrow x < 5$; $(-\infty, 5)$

37 **Observando la representación gráfica de estas parábolas, di cuáles son las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones propuestas:**

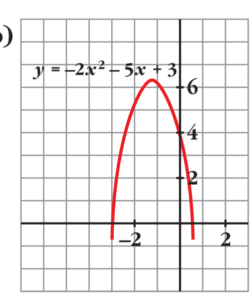
a)



$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x^2 - 6x + 9 > 0$

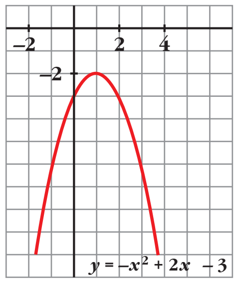
b)



$-2x^2 - 5x + 3 = 0$

$-2x^2 - 5x + 3 \ge 0$

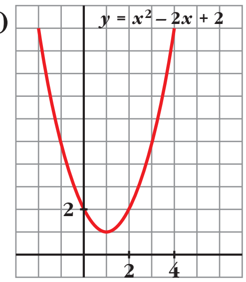
c)



$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 3 < 0$$

d)



$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0$$

a) Ecuación: $x = 3$

Inecuación: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) Ecuación: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Inecuación: $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

c) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: $\mathbb{R}$

d) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: $\mathbb{R}$

38 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1$; $(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1$; $(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0$; $(-5, 0)$

d) $(3x - 2)(3x + 2) > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $(x + 2)(x + 4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $(x + 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

39 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.

a) $\left.\begin{array}{l} 4x < 4 \;\rightarrow\; x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x > -5 \;\rightarrow\; x > -5/3 \\ x > 4 \end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ 5x > 19 \;\rightarrow\; x > 19/5 \end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{array}\right\}$ No tiene solución

40 **Resuelve:**

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ **b)** $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$ **d)** $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

a) $-(x + 3)(x - 1) \geq 0 \;\rightarrow\; [-3, 1]$

b) $\left(\sqrt{5} - x\right)\left(\sqrt{5} + x\right) < 0 \;\rightarrow\; \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$

c) $x(x + 3) > 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

d) $-(x - 1)(x - 5) \leq 0 \;\rightarrow\; (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

41 **Resuelve:**

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ **b)** $x^2 - 7x + 6 > 0$

$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

a) $[1, 6]$ b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

42 **Comprueba que todos los números reales son solución de esta inecuación:**

$$5(x - 2) - 4(2x + 1) < -3x + 1$$

$$5x - 10 - 8x - 4 < -3x + 1$$

$$0 < 15$$

Queda $0 < 15$, que es verdad para todos los números reales.

43 **Comprueba que no hay ningún número que verifique esta inecuación:**

$$3(x - 2) + 7 < x + 2(x - 5)$$

$$3x - 6 + 7 < x + 2x - 10$$

$$0 < -11$$

Queda $0 < -11$, que no es cierto.

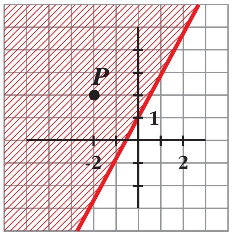
44 **Ana tiene 8 años menos que Javier. ¿Cuántos años puede tener Ana, si sabemos que el triple de su edad es mayor que el doble de la de Javier?**

Ana $\rightarrow x$ $\quad 3x > 2(x + 8)$

Javier $\rightarrow x + 8$ $\quad 3x > 2x + 16$

$x > 16$

Ana tendrá más de 16 años.

45 

a) Comprueba que el punto P verifica la inecuación $2x - y \leq -1$.

b) Elige tres puntos cualesquiera de la zona rayada y prueba que son soluciones de la inecuación.

a) Las coordenadas de P son $(-2, 2)$.

Sustituyendo en la inecuación, queda: $2 \cdot (-2) - (-2) = -2 \leq -1$

b) Por ejemplo, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, -1)$.

Todos los puntos de la zona rayada cumplen la inecuación.

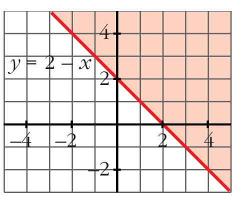
46 **Resuelve gráficamente:**

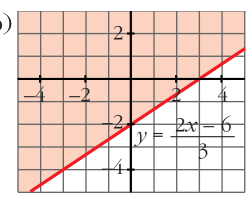
a) $x + y - 2 \geq 0$

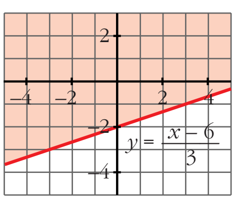
b) $2x - 3y \leq 6$

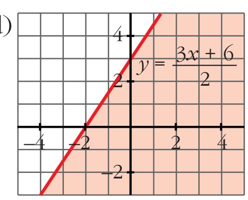
c) $\dfrac{x - 3y}{2} \leq 3$

d) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \geq -1$

a) 

b) 

c) 

d) 

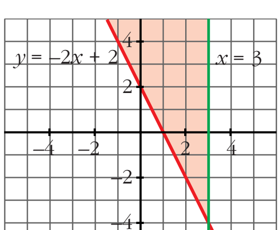
47 **Resuelve gráficamente:**

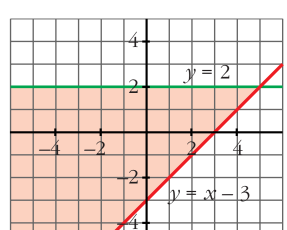
a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

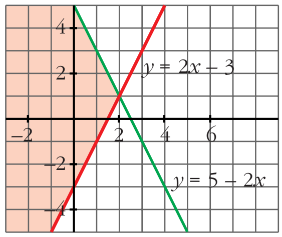
c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

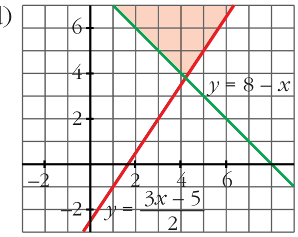
a) 

b) 

c)



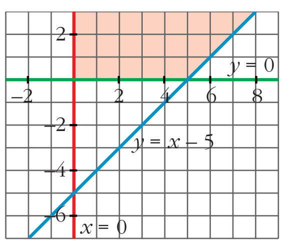
d)



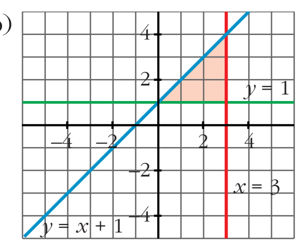
48 **Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas:**

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$

a)



b)



Página 110

Problemas de ecuaciones y sistemas

49 **Para la calificación de un curso, se decide que la primera evaluación cuente un 25%, la segunda, un 35% y la tercera, un 40%. Una alumna ha tenido un 5 en la primera y un 7 en la segunda. ¿Qué nota tiene que conseguir en la tercera para que su calificación final sea 7?**

$0,25 \cdot 5 + 0,35 \cdot 7 + 0,40 \cdot x = 7$

$0,40x = 3,3$

$x = 8,25$

Ha de conseguir un 8,25.

50 **Un comerciante compra 50 kg de harina y 80 kg de arroz, por los que tiene que pagar 66,10 €; pero consigue un descuento del 20% en el precio de la harina y un 10% en el del arroz. De esa forma paga 56,24 €. ¿Cuáles son los precios primitivos de cada artículo?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Precio 1 kg harina} \to x \\ \text{Precio 1 kg de arroz} \to y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 50x + 80y = 66,10 \\ 0,8 \cdot 50x + 0,9 \cdot 80y = 56,24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0,65 \text{ €} \\ y = 0,42 \text{ €} \end{array}$$

1 kg de harina valía 0,65 € y un kg de arroz 0,42 €.

51 **Un profesor de tenis reparte pelotas entre sus alumnos para hacer un entrenamiento. Da 3 a cada uno y sobran 12. Como quiere que cada alumno tenga 5, calcula que debe comprar 18 pelotas más. ¿Cuántos alumnos son?**

Hay x alumnos.

Número de pelotas $\rightarrow$ $3x + 12 = 5x - 18$; $30 = 2x$; $x = 15$

Son 15 alumnos.

52 **La edad de un padre es el cuádruple de la de su hijo, pero dentro de 16 años será solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?**

	AHORA	DENTRO DE 16 AÑOS
PADRE	$4x$	$4x + 16$
HIJO	x	$x + 16$

$$4x + 16 = 2(x + 16); \quad 4x + 16 = 2x + 32; \quad x = 8$$

El padre tiene 32 años y el hijo 8 años.

53 **La suma de un número par, el par anterior y los dos impares que le siguen, es 34. Calcula ese número.**

$$x + x - 2 + x + 1 + x + 3 = 34 \Rightarrow x = 8$$

Es el número 8

54 **Las dos cifras de un número suman 12. Si se invierte el orden de las mismas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho número.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}$$

Es el número 57.

55 **Tres empresas aportan 2, 3 y 5 millones de euros para la comercialización de un nuevo avión. A los cinco años reparten beneficios, correspondiendo a la tercera 189 000 € más que a la segunda. ¿Cuál fue la cantidad repartida?**

☛ ***A la primera le corresponden 2/10 de los beneficios.***

$$\begin{array}{lcccl} & & & & \text{Beneficios} \\ 1^{\text{a}} & \rightarrow & 2 \text{ millones} & \rightarrow & y \\ 2^{\text{a}} & \rightarrow & 3 \text{ millones} & \rightarrow & x \\ 3^{\text{a}} & \rightarrow & \underline{5 \text{ millones}} & \rightarrow & \underline{189\,000 + x} \\ & & 10 \text{ millones} & & 2x + y + 189\,000 \end{array}$$

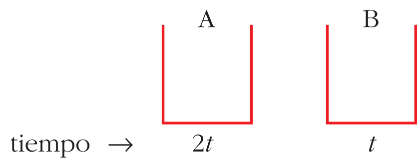
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{10}(2x + y + 189\,000) = y \\ \dfrac{3}{10}(2x + y + 189\,000) = x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x - 4y = -189\,000 \\ -4x + 3y = -567\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 283\,500 \\ y = 189\,000 \end{array}$$

Total $= 2x + y + 189\,000 = 945\,000$ €

La cantidad repartida fue de 945 000 €.

56 **Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en 2 horas. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?**

☛ ***Si A tarda x horas en llenar el depósito, en 1 hora llena $1/x$ del depósito.***



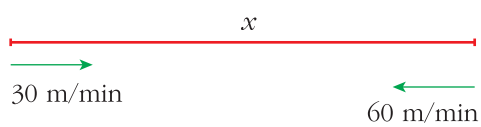
En 1 hora $\rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2t}$ partes del depósito

Tiempo entre los dos: $\frac{2t}{3} = 2$ horas $\Rightarrow$ $t = 3$ horas

$2t = 6$ horas

B tarda 3 horas y A 6 horas.

57 **Un remero sube con su barca por un río a una velocidad de 30 m/min y baja a 60 m/min. ¿Hasta qué distancia se aleja en un paseo de hora y media?**



$$\left.\begin{aligned} 30 &= \frac{x}{t} \\ 60 &= \frac{x}{90 - t} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 30t &= x \\ 60(90 - t) &= x \end{aligned}\right\}$$

$$30t = 5\,400 - 60t; \quad t = 60 \text{ min}$$

Tarda 60 minutos en la ida y 30 en la vuelta. Se aleja una distancia de 1 800 m.

58 **Se mezclan 30 kg de café de 6 €/kg con cierta cantidad de otro de 8 €/kg, resultando la mezcla a 7,25 €/kg. ¿Qué cantidad del café más caro se ha utilizado?**

☛ ***Precio de 1 kg de mezcla = $\frac{\textit{coste total}}{\textit{total de kilos}}$***

A → 30 kg → 6 €/kg

B → x kg → 8 €/kg

Mezcla → $(30 + x)$ kg → 7,25 €/kg

$$7{,}25 = \frac{30 \cdot 6 + 8x}{30 + x}; \quad 217{,}5 + 7{,}25x = 180 + 8x$$

$$0{,}75x = 37{,}5 \Rightarrow x = 50 \text{ kg}$$

59 **Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20% a unos y un 25% a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se les rebajó el 25%.**

		PRECIO ORIGINAL		CON DESCUENTO
UNOS	$\to x \to$	$1\,200x$	$\xrightarrow{-20\%}$	$0{,}8 \cdot 1\,200x = 960x$
OTROS	$\to y \to$	$1\,200y$	$\xrightarrow{-25\%}$	$0{,}75 \cdot 1\,200y = 900y$

$$\left.\begin{aligned} x + \quad y &= 60 \\ 960x + 900y &= 56\,400 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 40 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Se vendieron 20 ordenadores con un 25% de descuento y 40 ordenadores con un 20% de descuento.

60 **En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 52% de los participantes. En la segunda prueba se elimina el 25% de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es de 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?**

Recuerda que para calcular el 52% de una cantidad, dicha cantidad se multiplica por 0,52. ¿Por cuánto habrá que multiplicar para calcular el 25% del 48% restante?

$$\text{Se presentan } x \xrightarrow[\text{1ª prueba}]{-52\%} \underset{\text{QUEDAN}}{0{,}48x} \xrightarrow[\text{2ª prueba}]{-25\%} \underset{\text{QUEDAN}}{0{,}75 \cdot 0{,}48x = 0{,}36x}$$

Queda el 36% del total. Se ha eliminado el 64% del total:

$$0{,}64x = 512 \;\Rightarrow\; x = 800$$

Se presentaron 800 personas.

61 **Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?**

Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.

Tenía x docenas $\to \dfrac{36}{x}$ €/docena

Le quedan $x - 4$ docenas $\to \left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)$ €/docena

$\left(\dfrac{36}{x} + 0{,}45\right)(x - 4) = 36$

$(36 + 0{,}45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0{,}45x^2 - 1{,}8x = 36x$

$0{,}45x^2 - 1{,}8x - 144 = 0$

$x = 20$ ($x = -16$ no vale) $\Rightarrow$ Tenía 20 docenas.

62 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €.**

¿Cuántos kilos compró?

Iguala el coste de las que se desechan más las ganancias, al aumento de coste de las que quedan.

Compró x kg $\rightarrow \dfrac{125}{x}$ €/kg

Vende $(x - 20)$ kg $\rightarrow \left(\dfrac{125}{x} + 0{,}40\right)$ €/kg

$$\left(\frac{125}{x} + 0{,}40\right)(x - 20) = 147$$

$(125 + 0{,}40x)(x - 20) = 147x$

$125x - 2\,500 + 0{,}40x^2 - 8x = 147x$

$0{,}40x^2 - 30x - 2\,500 = 0$

$x = 125$ ($x = -50$ no vale)

Compró 125 kg.

63 **En cinco platos se han repartido 100 albóndigas. Los platos 1º y 2º tienen en total 52; el 2º y 3º, 43; el 3º y el 4º, 34; el 4º y el 5º, 30.**

¿Cuántas albóndigas hay en cada plato?

Si el 1º tiene x, el 2º tiene 52 – x. Haz el mismo razonamiento con los demás.

1º $\rightarrow x$

2º $\rightarrow 52 - x$

3º $\rightarrow 43 - (52 - x) = x - 9$

4º $\rightarrow 34 - (x - 9) = 43 - x$

5º $\rightarrow 30 - (43 - x) = x - 13$

$$x + 52 - x + x - 9 + 43 - x + x - 13 = 100$$

En el 1º hay 27 albóndigas; 25 en el 2º; 18 en el 3º; 16 en el 4º y 14 en el 5º.

Página 111

64 **Varios amigos toman un refresco en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80 € cada uno.**

¿Cuántos amigos son?

Número de amigos $\rightarrow x \rightarrow \dfrac{6}{x}$ €/consumición

$(x - 2)\left(\dfrac{6}{x} + 0{,}80\right) = 6$

$(x - 2)(6 + 0{,}80x) = 6x$

$6x + 0{,}80x^2 - 12 - 1{,}6x = 6x$

$0{,}80x^2 - 1{,}6x - 12 = 0$

$x = 5$ $(x = -3$ no vale)

Son 5 amigos.

65 **El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero.**

Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?

$$\text{Enero} \xrightarrow{+12\%} \text{Febrero} \xrightarrow{-12\%} \text{Marzo}$$

$$x \qquad 1{,}12x \qquad 0{,}88 \cdot 1{,}12x = 0{,}9856x$$

$x = 0{,}9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500$ personas

66 **Un inversor, que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8% y el resto en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

$$28\,600 \text{ €} \left\{ \begin{array}{l} x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0{,}08x \\ (28\,000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0{,}06(28\,000 - x) \end{array} \right.$$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200$

$0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200$

$x = 13\,428{,}57$ € al 8%

CUESTIONES TEÓRICAS

67 **Determina para qué valores de b la ecuación $x^2 - bx + 9 = 0$ tiene:**

a) Una solución **b) Dos soluciones**

$x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 36}}{2}$; $b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b = \pm 6$

a) $b = -6$ y $b = 6$ b) $b < -6$ o bien $b > 6$

68 **¿Qué valor ha de tomar k para que la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga solución?**

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$; $36 - 4k < 0 \Rightarrow k > 9$

69 **Escribe una ecuación que tenga por soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.**

$(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

70 **¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Pon ejemplos.**

Cuatro o menos.

Ejemplos:

Ninguna solución $\rightarrow x^4 + 1 = 0$

Una solución $\rightarrow x^4 + x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

Dos soluciones $\rightarrow x^4 - 9 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$

Tres soluciones $\rightarrow x^4 - 9x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

Cuatro soluciones $\rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

71 **¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación $x^2 + k = 0$?**

Para $k \le 0$.

72 **¿Qué condición deben cumplir a y b para que el siguiente sistema tenga solución?**

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ 4x + 6y = b \end{cases}$$

$b = 2a$. En este caso, tendría infinitas soluciones.

(Si $b \ne 2a$, tendríamos dos rectas paralelas y el sistema no tendría solución.)

PARA PROFUNDIZAR

73 **Un campesino tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 bueyes, el pienso le duraría 3 días más y si comprase 25 bueyes, el pienso le duraría 3 días menos.**

Halla el número de bueyes y de días que los puede alimentar.

Si x es el número de bueyes y t el número de días que los puede alimentar, xt es la cantidad de raciones de pienso que tiene el campesino.

		DÍAS CON PIENSO		RACIONES
NÚMERO DE BUEYES $\rightarrow x$	$\rightarrow$	y	$\rightarrow$	xy
$x - 15$	$\rightarrow$	$y + 3$	$\rightarrow$	$(x - 15)(y + 3)$
$x + 25$	$\rightarrow$	$y - 3$	$\rightarrow$	$(x + 25)(y - 3)$

$$\left.\begin{aligned} xy &= (x - 15)(y + 3) \\ xy &= (x + 25)(y - 3) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} xy &= xy + 3x - 15y - 45 \\ xy &= xy - 3x + 25y - 75 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3x - 15y &= 45 \\ -3x + 25y &= 75 \end{aligned}\right\}$$

$10y = 120 \Rightarrow y = 12;\ x = 75$

Tiene 75 bueyes, que puede alimentar durante 12 días.

74 **Un avión militar vuela a 600 km/h cuando no hace viento y puede llevar combustible para 4 horas. Cuando va a salir hay un viento en contra de 60 km/h que se mantendrá, según los pronósticos, durante todo el trayecto. ¿Cuántos kilómetros puede alejarse de su base de modo que pueda regresar sin repostar?**

Cuando el avión va a favor del viento, la velocidad es de 660 km/h.

600 km/h sin viento $\rightarrow$ 4 h combustible

Viento en contra de 60 km/h

x km

V_{ida} = 540 km/h

V_{vuelta} 660 km/h

$t_{ida} = t$

$t_{vuelta} = 4 - t$

$$\left.\begin{array}{l} x = 540t \\ x = 660(4-t) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 540t = 660(4-t) \\ 540t = 2\,640 - 660t \end{array}\right\} \quad t = 2{,}2 \text{ h}; \;\; x = 1\,188 \text{ km}$$

75 **Dos grifos llenan juntos un depósito en 12 minutos. Uno de ellos, solo, tarda 10 minutos menos en llenar el depósito que el otro. ¿Cuánto tarda cada uno de ellos en llenar el depósito por separado?**

$$\left\{\begin{array}{l} 1^{\underline{o}} \rightarrow t \\ 2^{\underline{o}} \rightarrow t - 10 \\ \text{Juntos} \rightarrow 12 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow 12(t-10) + 12t = t(t-10)$$

$$12t - 120 + 12t = t^2 - 10t \Rightarrow 0 = t^2 - 34t + 120$$

$t = 30$ ($t = 4$ no vale)

Uno tarda 30 minutos y el otro 20 minutos.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

76 **Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?**

x cazos V_1	$(12 - x)$ cazos V_2	12 cazos
3 alcohol 7 agua	2 alcohol 3 agua	3 alcohol 5 agua
$\frac{3}{10}$ alcohol	$\frac{2}{5}$ alcohol	$\frac{3}{8}$ alcohol

La proporción de alcohol es:

$$\frac{3}{10}x + (12 - x) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24 - 2x}{5} = \frac{9}{2}; \;\; 3x + 48 - 4x = 45; \;\; x = 3$$

Solución: 3 cazos de la primera y 9 de la segunda.

77 **Un viajero que va a tomar su tren ha cubierto 3,5 km en 1 hora y se da cuenta de que, a ese paso, llegará 1 hora tarde. Entonces acelera el paso y recorre el resto del camino a una velocidad de 5 km/h, llegando media hora antes de que salga el tren.**

¿Qué distancia tenía que recorrer?

t = tiempo que tarda en recorrer x a 3,5 km/h

Si va a 5 km/h tarda $t - 1,5$ (1 hora y media menos)

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3,5t \\ x = 5(t - 1,5) \end{array}\right\} 3,5t = 5t - 7,5; \;\; t = 5 \text{ horas}$$

$$x = 17,5 \text{ km}$$

Tenía que recorrer 17,5 km (21 km si contamos los 3,5 km del principio).

Página 114

RESUELVE TÚ

En unas elecciones hay 20 000 votantes y se reparten 10 escaños. Concurren 5 partidos, A, B, C, D, E, que obtienen los números de votos que figuran en la primera columna.

	1	2	3	4	5
A	**8 435** (1)	**4 217** (3)	**2 812** (6)	**2 109** (7)	**1 687** (9)
B	**6 043** (2)	**3 021** (5)	**2 014** (8)	1 511	
C	**3 251** (4)	**1 625** (10)			
D	1 150				
E	1 121				

a) Comprueba la validez de los resultados de las restantes columnas y di el reparto de escaños según el *método d'Hondt*.

b) Haz el reparto de escaños aplicando el método del *mayor resto*.

c) Suponiendo que el número de escaños para repartir fuera 8, haz nuevamente el reparto por ambos métodos.

a) Método d'Hondt:

Los escaños se reparten sucesivamente así: A B A C B A A B A C

Por tanto, se asignan así: A – 5, B – 3, C – 2, D – 0, E – 0

b) Método del mayor resto:

El precio del escaño es 20 000 votos/10 escaños = 2 000 votos cada escaño.

Por tanto:

	VOTOS	ESCAÑOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA	RESTO	TOTAL ESCAÑOS
A	8 435	4	435	4
B	6 043	3	43	3
C	3 251	1	1 251	1 + 1 = 2
D	1 150	0	1 150	0 + 1 = 1
E	1 121	0	1 121	0
		8		

SEGÚN MÉTODO HONDT
5
3
2
0
0

Si se aplicara el método del mayor resto, el partido D le quitaría un escaño al partido A.

c) Para la asignación de los 8 escaños sirve la misma tabla de arriba, obteniéndose:

A B A C B A A B

Es decir, A – 4, B – 3, C – 1, D – 0, E – 0

Para aplicar el método del mayor resto tenemos en cuenta que, ahora, el precio del escaño es 20 000 : 8 = 2 500 votos cada escaño.

	VOTOS	ESCAÑOS DE ASIGNACIÓN DIRECTA	RESTO	TOTAL ESCAÑOS
A	8 435	3	935	3
B	6 043	2	1 043	2
C	3 251	1	751	1
D	1 150	0	1 150	0 + 1 = 1
E	1 121	0	1 121	0 + 1 = 1
		6		

SEGÚN MÉTODO HONDT
4
3
1
0
0

$$\begin{array}{r|l} 8\,435 & 2\,500 \\ \cline{2-2} 935 & 3 \end{array}$$

El partido A compra 3 escaños y le sobran (tiene un resto de 935) votos.

Ahora son los dos partidos pequeños los que les quitarían sendos escaños a los dos grandes.