6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Página 140

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

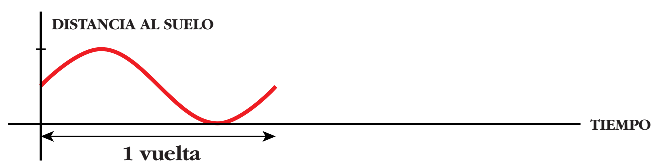
Problema 1

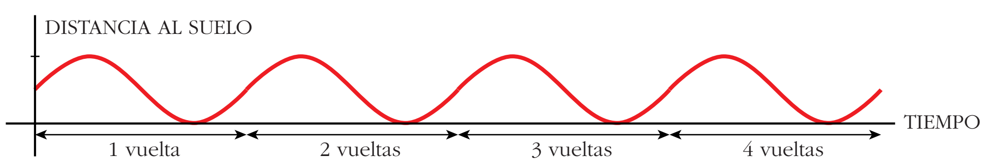
■ **Modificando la escala, representa la función:**

x: tiempo transcurrido

y: distancia al suelo

correspondiente a cuatro vueltas de la noria.





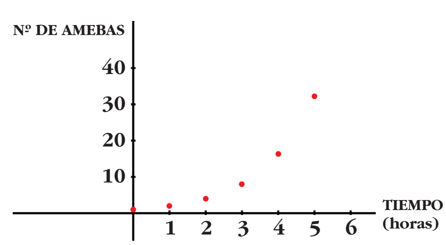
Problema 2

Las amebas, como sabes, son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones del medio en que se encuentren (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente, hay una ameba.

a) Calcula el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y completa esta tabla en tu cuaderno:

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE AMEBAS	1	2	4				

b) Representa gráficamente estos datos en una hoja de papel cuadriculado.



c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables sean, ahora:

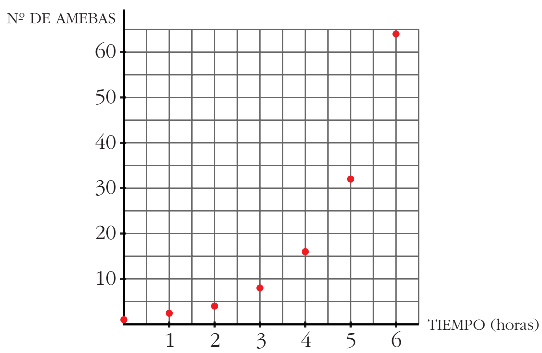
***x*: número de amebas**

***y*: tiempo (en horas)**

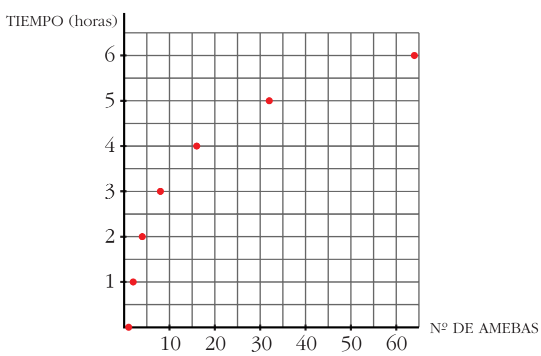
a)

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE AMEBAS	1	2	4	8	16	32	64

b)



c)



Página 141

Problema 3

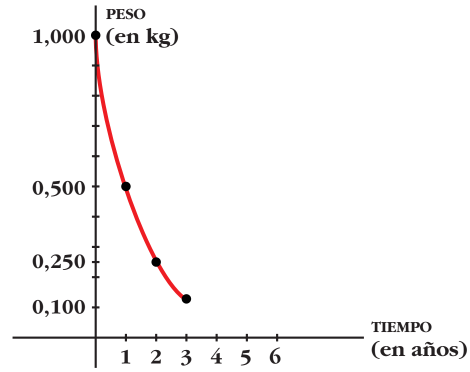
Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias y lo hacen con mayor o menor rapidez, según de cuál se trate.

Supongamos que tenemos 1 kg de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año. El resto de la masa no desaparece, sino que se transforma en otro componente químico distinto.

a) Completa la tabla siguiente (utiliza la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales):

TIEMPO (años)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
SUST. RADIACT. (en kg)	**1**	**0,5**	**0,250**	**0,125**			

b) Representa gráficamente los datos en papel cuadriculado.



c) Cambia los ejes y representa la función cuyas variables son, ahora,

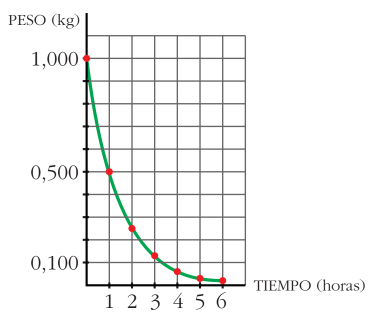
x: peso de la sustancia radiactiva (en kg)

y: tiempo transcurrido (en años)

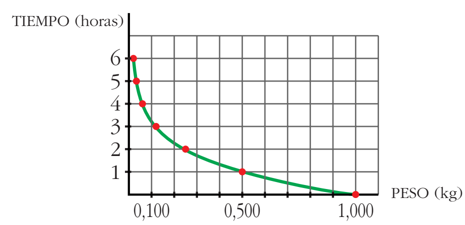
a)

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUST. RADIACT. (en kg)	1	0,5	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016

b)



c)



Página 146

1. Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179$; $g[f(4)] = 1$

2. Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, obtén la expresión de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

$f \circ g(x) = sen(x^2 + 5)$; $f \circ g(0) = -0{,}96$; $f \circ g(2) = 0{,}41$

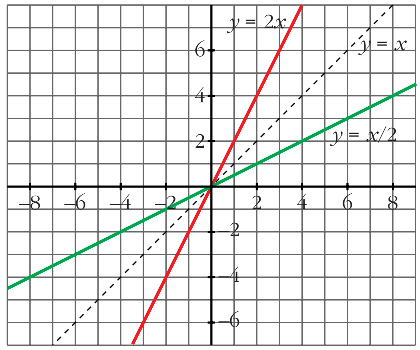
$g \circ f(x) = sen^2\, x + 5$; $g \circ f(0) = 5$; $g \circ f(2) = 5{,}83$

$f \circ f(x) = sen(sen\ x)$; $f \circ f(0) = 0$; $f \circ f(2) = 0{,}79$

$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5$; $g \circ g(0) = 30$; $g \circ g(2) = 86$

Página 147

1. Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.



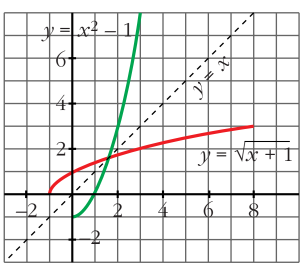
2. Comprueba que $y = x^2 - 1$ hay que descomponerla en dos ramas para hallar sus simétricas. Averigua cuáles son.

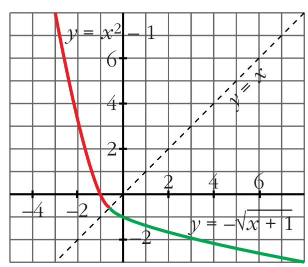
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$

b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$



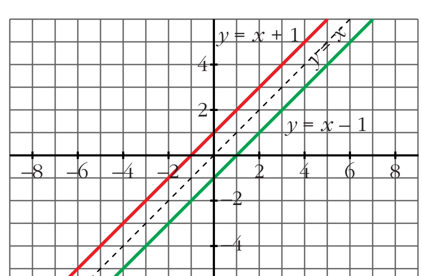


3. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, prueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g.

Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$

Son funciones inversas.



Página 153

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

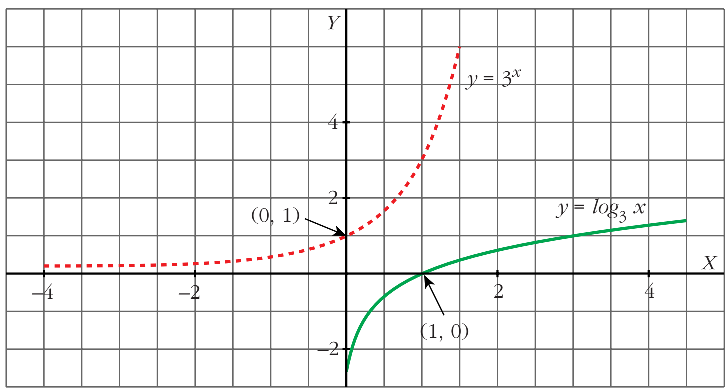
PARA PRACTICAR

1 **Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa la función $y = log_3\ x$.**

☛ ***Si el punto (2, 9) pertenece a $y = 3^x$, el punto (9, 2) pertenecerá a $y = log_3\ x$.***

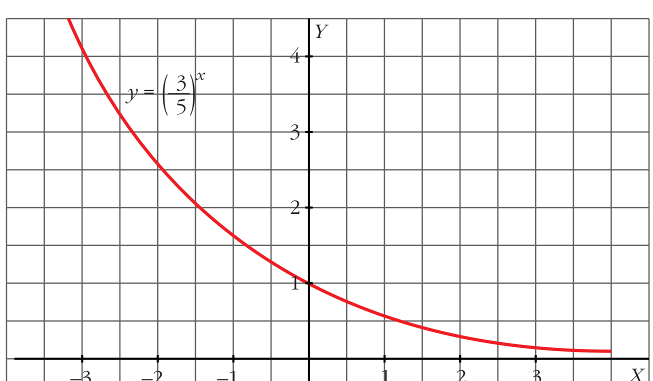
x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3\ x$	–2	–1	0	1	2

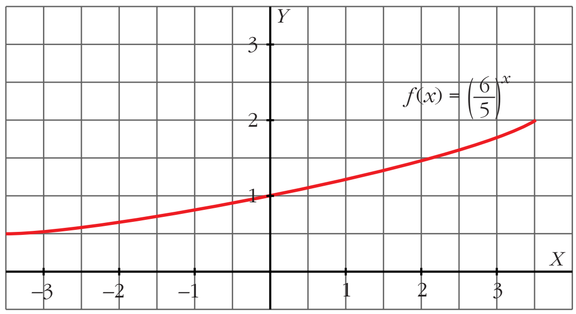


2 **Con ayuda de la calculadora, haz una tabla de valores de la función $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ y represéntala gráficamente.**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



3 **Representa la función $y = \left(\frac{6}{5}\right)^x$. ¿Es creciente o decreciente?**



Es creciente.

4 **Considera las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-3)$ **c)** $(g \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(x)$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $g(g(x)) = x$ d) $f(g(x)) = \frac{1 + x^2}{x^2}$

5 **Dadas las funciones $f(x) = cos\ x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:**

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$ **c)** $(g \circ g)(x)$

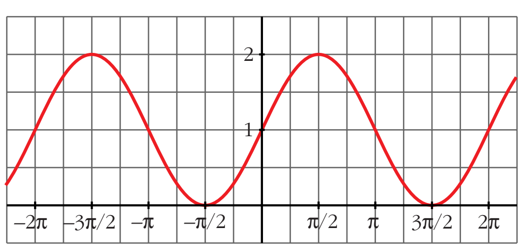
a) $f[g(x)] = cos\sqrt{x}$ b) $g[f(x)] = \sqrt{cos\ x}$ c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

6 **Representa las funciones:**

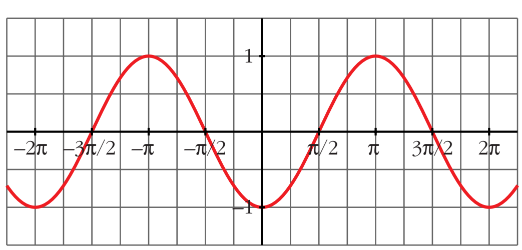
a) $y = 1 + sen\ x$

b) $y = -cos\ x$

a)



b)



7 **Halla la función inversa de estas funciones:**

a) $\boldsymbol{y = 3x}$

b) $\boldsymbol{y = x + 7}$

c) $\boldsymbol{y = 3x - 2}$

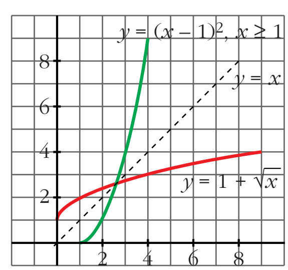
a) $x = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $x = y + 7 \Rightarrow y = x - 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

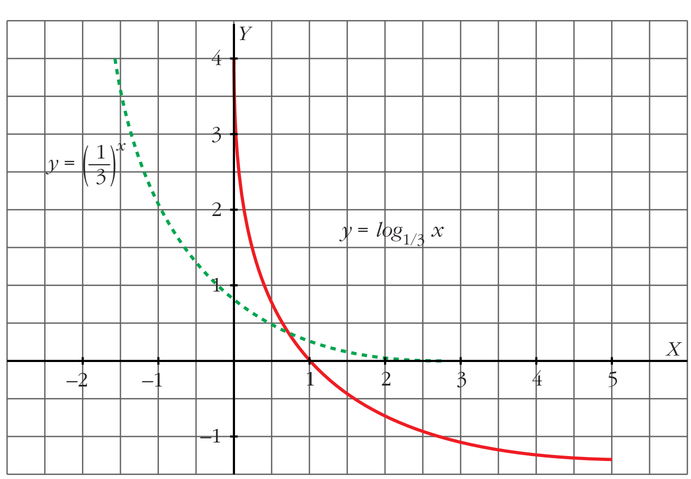
c) $x = 3y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

8 **Dada la función** $\boldsymbol{f(x) = 1 + \sqrt{x}}$**, halla** $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$**. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del 1^er^ cuadrante.**

$f^{-1}(x) = (x-1)^2, \ x \geq 1$

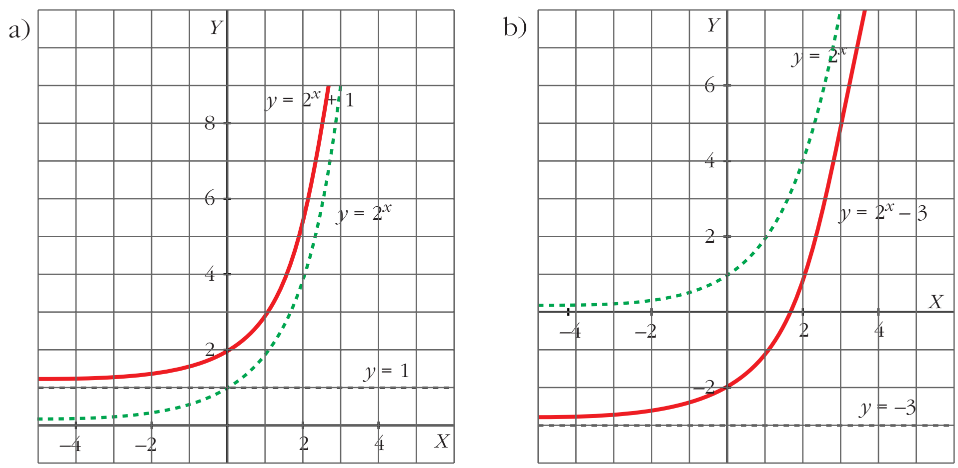


9 **Representa la gráfica de** $\boldsymbol{y = log_{1/3}\, x}$ **a partir de la gráfica de** $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$**.**



10 **Representa las funciones: a) $y = 2^x + 1$; b) $y = 2^x - 3$**

☛ ***Utiliza la gráfica de $y = 2^x$.***



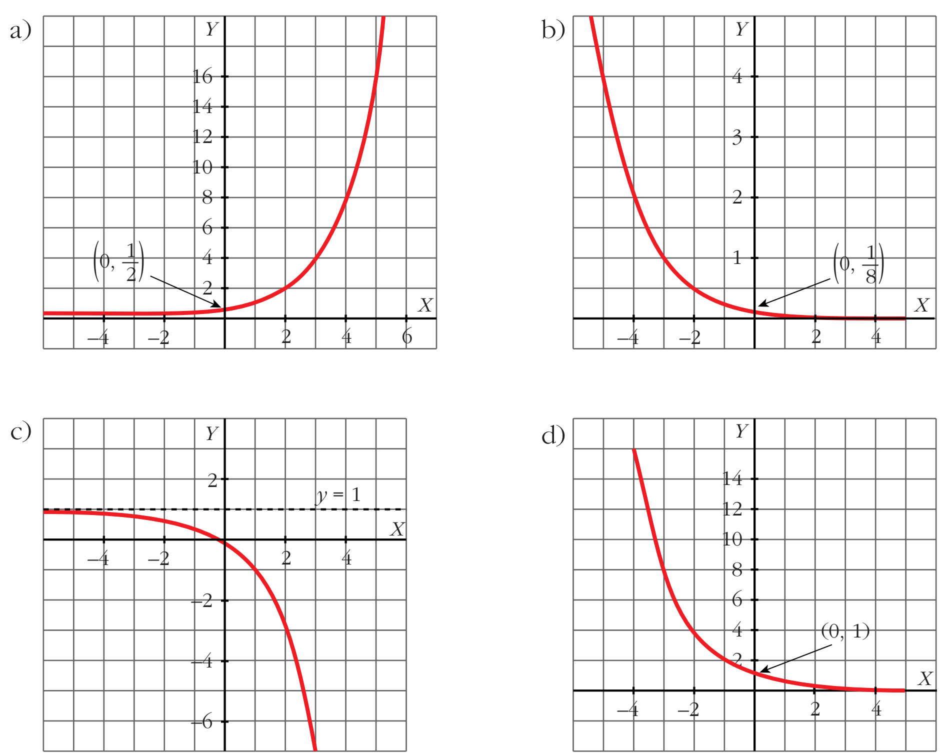
11 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 2^{x-1}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$

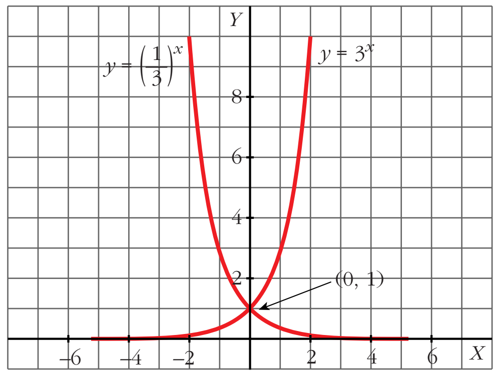
c) $y = 1 - 2^x$

d) $y = 2^{-x}$



12 **Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje *OY*.**

☛ ***Represéntalas en los mismos ejes.***

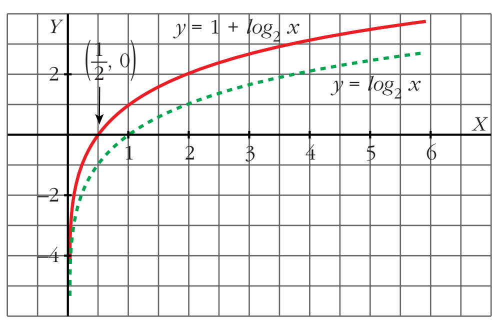


13 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\ x$:**

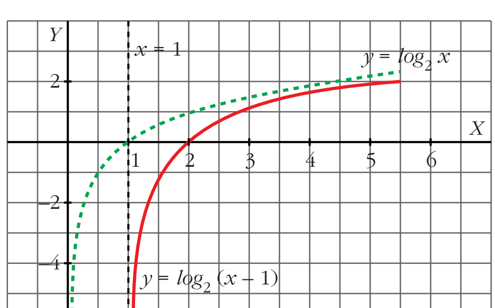
a) $y = 1 + log_2\ x$ **b)** $y = log_2\ (x - 1)$

☛ ***En b), el dominio es $(1, +\infty)$.***

a) $y = 1 + log_2\ x$

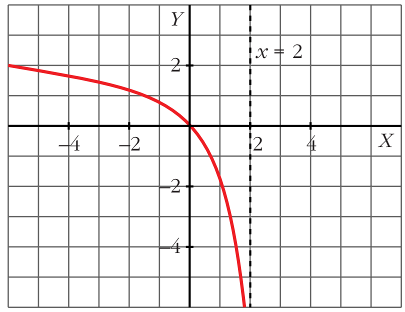


b) $y = log_2\ (x - 1)$



14 **¿Cuál es el dominio de esta función?:** $y = log_2 (2 - x)$. **Represéntala.**

Dominio: $(-\infty, 2)$



PARA RESOLVER

15 **La gráfica de una función exponencial del tipo** $y = k a^x$ **pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

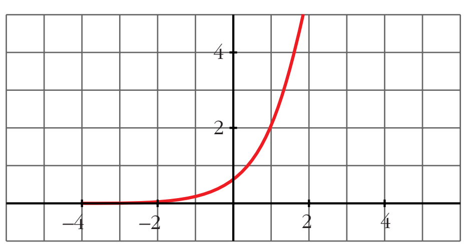
a) Calcula k **y** a.

b) Representa la función.

a) $\left.\begin{array}{l} 0{,}5 = k \cdot a^0 \\ 1{,}7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0{,}5 = k \\ 1{,}7 = k \cdot a \end{array}$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} k = 0{,}5 \\ a = 3{,}4 \end{array}\right.$

La función es $y = 0{,}5 \cdot (3{,}4)^x$

b)



16 **Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 euros al cabo de un año cuesta 106 euros, la inflación ha sido del 6%.**

Suponiendo que la inflación se mantiene constante en el 6% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta cinco mil euros?

$5\,000 \cdot (1{,}06)^5 \approx 6\,691{,}13$ euros

17 **En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 6% anual.**

a) Si empieza ganando 10 000 euros anuales, ¿cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Calcula cuánto tiempo tardará en duplicarse su sueldo.

a) $10\,000 \cdot (1{,}06)^{10} \approx 17\,908{,}48$ euros

b) $1{,}06^x = 2 \Rightarrow x \approx 12$ años tardará en duplicarse.

18 **Se sabe que la concentración de un fármaco en sangre viene dado por $y = 100\,(0{,}94)^t$ (y en miligramos, t en horas).**

a) ¿Cuál es la dosis inicial?

b) ¿Qué cantidad de ese fármaco tiene el paciente al cabo de 1 hora? ¿Y de tres horas?

c) Representa la función.

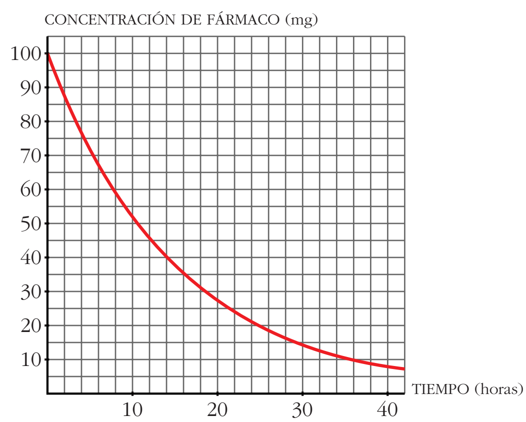
d) Si queremos que la concentración no baje de 60 mg, ¿al cabo de cuánto tiempo tendremos que inyectarle de nuevo?

a) $t = 0 \;\rightarrow\; y = 100$ mg

b) $t = 1 \;\rightarrow\; y = 94$ mg en 1 hora

$t = 3 \;\rightarrow\; y = 83$ mg en 3 horas

c)



d) $100 \cdot (0{,}94)^t = 60 \;\Rightarrow\; t \approx 8$ h 15 min

Al cabo de, aproximadamente, 8 h 15 min.

Página 154

19 **Con las funciones $f(x) = x - 5$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$, hemos obtenido, por composición, estas otras:**

$$p(x) = \sqrt{x-5} \qquad q(x) = \sqrt{x} - 5 \qquad r(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener p, q y r.

$$p = g \circ f \qquad q = f \circ g \qquad r = h \circ g$$

20 **Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2 x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$? ¿Y $(g \circ f)(x)$?**

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

21 **Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 2^{x/10}$ (y: miles de bacterias, x: horas).**

a) ¿Cuántas había en el momento inicial?

b) ¿Y al cabo de 10 horas?

c) Calcula cuánto tiempo tardarán en duplicarse.

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ 2 000 bacterias

b) $x = 10 \rightarrow y = 1 + 2 = 3 \rightarrow$ 3 000 bacterias

c) $1 + 2^{x/10} = 4 \rightarrow x = \dfrac{10 \log 3}{\log 2} \approx 15{,}8$ h ≈ 16 h

Aproximadamente, 16 horas.

22 **De la función exponencial $f(x) = ka^x$ conocemos $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$. ¿Cuánto valen k y a?**

$f(0) = 5 \Rightarrow 5 = k$

$f(3) = 40 \Rightarrow 40 = 5 \cdot a^3 \Rightarrow a = 2$

La función es $f(x) = 5 \cdot 2^x$

23 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$ **b)** $y = 1 + 3^x$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\dfrac{x}{3} = 2^{y-1}$; $\log_2 \dfrac{x}{3} = y - 1$

$y = 1 + \log_2 \dfrac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \log_2 \dfrac{x}{3}$

b) $x = 1 + 3^y$; $x - 1 = 3^y$; $\log_3 (x - 1) = y \rightarrow f^{-1}(x) = \log_3 (x - 1)$

24 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2{,}3^x = 18$ **b)** $7 \cdot 3^x = 567$

c) $\dfrac{2^x}{3} = 7{,}5$ **d)** $4^{2x-1} = 0{,}25$

a) $x \log 2{,}3 = \log 18 \Rightarrow x = \dfrac{\log 18}{\log 2{,}3} = 3{,}47$

b) $3^x = \dfrac{567}{7} \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

c) $2^x = 22{,}5 \Rightarrow x = \dfrac{\log 22{,}5}{\log 2} = 4{,}49$

d) $4^{2x-1} = 4^{-1} \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

25 **Las siguientes ecuaciones exponenciales tienen soluciones enteras. Hállalas:**

a) $\mathbf{2^{x^2+1} = 32}$ **b)** $\mathbf{3^{2x-5} = 2\,187}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}}$ **d)** $\mathbf{(0{,}5)^x = 16}$

a) $2^{x^2+1} = 2^5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) $3^{2x-5} = 3^7 \Rightarrow 2x - 5 = 7 \Rightarrow x = 6$

c) $7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = -2 \Rightarrow x = -4$

d) $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$

26 **Resuelve mediante un cambio de variable:**

a) $\mathbf{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0}$ **b)** $\mathbf{3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21}$ **c)** $\mathbf{3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}}$

a) $2^x = z;\ z^2 - 5z + 4 = 0;\ z_1 = 4,\ z_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 0$

b) $3^x = z;\ z - \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{9} = 21 \Rightarrow z = 27 \Rightarrow x = 3$

c) $3^x = z;\ z - \dfrac{1}{z} = \dfrac{728}{27} \Rightarrow z^2 - 1 = \dfrac{728}{27}z \Rightarrow 27z^2 - 728z - 27 = 0$

$z_1 = 27 \Rightarrow x_1 = 3;\ z_2 = -\dfrac{2}{54}$ (no vale)

27 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{7^{x+2} = 823\,543}$ **b)** $\mathbf{5^{5x-2} = 390\,625}$

c) $\mathbf{3^x + 3^{x+2} = 39}$ **d)** $\mathbf{10^{3+x} = 1}$

a) $7^{x+2} = 7^7 \Rightarrow x + 2 = 7 \Rightarrow x = 5$

b) $5^{5x-2} = 5^8 \Rightarrow x = 2$

c) $3^x(1 + 9) = 39 \Rightarrow 3^x = 3{,}9 \Rightarrow x = \dfrac{\log 3{,}9}{\log 3} = 1{,}24$

d) $3 + x = 0 \Rightarrow x = -3$

28 **Calcula** $\mathbf{x}$ **en las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{\log x = \log 9 - \log 4}$ **b)** $\mathbf{\ln x = 3 \ln 5}$

c) $\mathbf{3 + 2 \log x = 5}$ **d)** $\mathbf{\frac{1}{3} \log_2 x = -3}$

a) $\log x = \log \dfrac{9}{4} \Rightarrow x = \dfrac{9}{4}$

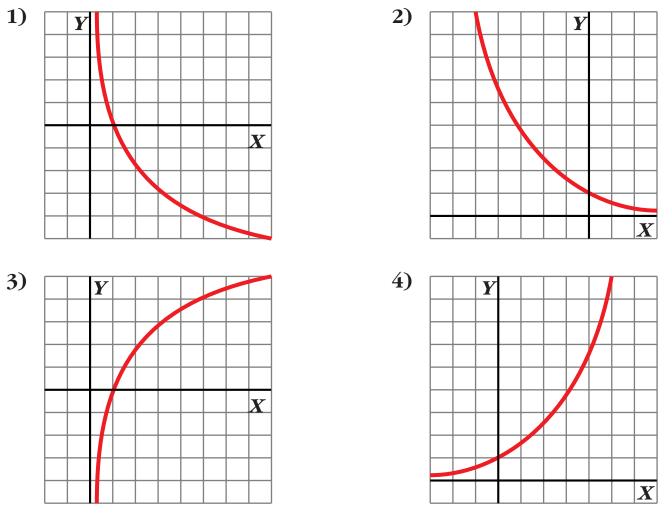
b) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 125$

c) $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$

d) $\log_2 x = -9 \Rightarrow x = 2^{-9} = \dfrac{1}{512}$

CUESTIONES TEÓRICAS

29 **Estas gráficas corresponden a funciones del tipo $y = a^x$, $y = log_a\, x$. Identifícalas e indica, en cada caso, si es $a > 1$ o $0 < a < 1$.**



1) $y = log_a\, x$, $0 < a < 1$

2) $y = a^x$, $0 < a < 1$

3) $y = log_a\, x$, $a > 1$

4) $y = a^x$, $a > 1$

30 **Para cada una de las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$, contesta:**

a) ¿Son funciones continuas?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Entre qué valores están acotadas?

d) ¿Para qué valores de x es $sen\, x < 0$? ¿Y $cos\, x < 0$?

a) Sí.

b) 2π

c) Entre –1 y 1.

d) Entre 0 y 2π: $sen\, x < 0$ para $x \in (\pi, 2\pi)$

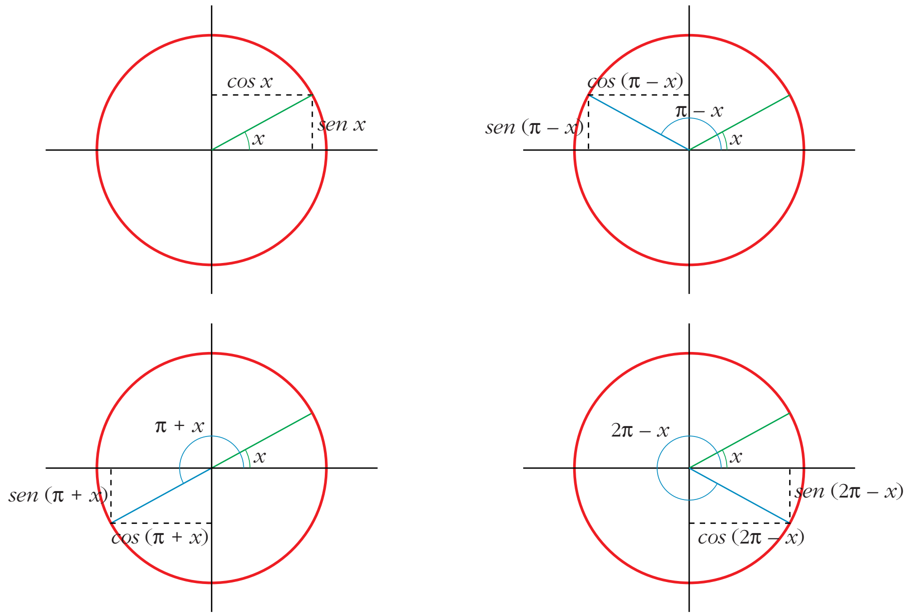
$cos\, x < 0$ para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

31 **a) ¿Existe algún valor de x tal que $sen\, x = 1{,}5$?**

b) Justifica que $-1 \leq sen\, x \leq 1$.

a) No.

b) El radio de la circunferencia es 1, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado; y $sen\, x$ es uno de los catetos.



32 **Busca los valores de x comprendidos entre 0 y 2π que verifiquen $sen\ x = \frac{1}{2}$.**

$x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$

Página 155

33 **Para cada una de las funciones $y = a^x$ e $y = log_a\ x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y?

b) ¿Podemos dar a x valores negativos?

Para $y = a^x$: a) No. b) Sí.

Para $y = log_a\ x$: a) Sí. b) No.

34 **Las gráficas de las funciones $y = a^x$ pasan todas por un mismo punto. ¿Cuál es ese punto?**

(0, 1)

35 **¿Para qué valores de a la función $y = a^x$ es creciente? ¿Para cuáles es decreciente?**

Para $a > 1$ la función $y = a^x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = a^x$ es decreciente.

36 **Indica para qué valores de a es creciente la función $y = log_a\, x$. ¿Para cuáles es decreciente?**

Para $a > 1$ la función $y = log_a\, x$ es creciente.

Para $0 < a < 1$ la función $y = log_a\, x$ es decreciente.

37 **Las gráficas de las funciones $y = log_a\, x$ tienen un punto en común. ¿Cuál es ese punto?**

(1, 0)

38 **¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$, siendo $a > 1$?**

$x < 0$

PARA PROFUNDIZAR

39 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^{x+y} = 729 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 7^{x+y} = 49^3 \\ 7^{x-y} = 49 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3^x + 3^y = 90 \\ 3^x \cdot 3^y = 729 \end{array}\right\}$ Cambio: $3^x = a$; $3^y = b$

$\left.\begin{array}{l} a + b = 90 \\ a \cdot b = 729 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} b = 90 - a \\ a\,(90 - a) = 729;\ \ 90a - a^2 = 729 \end{array}$

$a^2 - 90a + 729 = 0;\ \ a \begin{array}{l} 9 \ \to\ b = 81 \\ 81 \ \to\ b = 9 \end{array}$

Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 2;\ \ y_1 = 4 \\ x_2 = 4;\ \ y_2 = 2 \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \end{array}$

40 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $log_2\, x + log_2\, 50 = 1$

b) $log\, \dfrac{x}{2} = log\, 18 - log\, x$

a) $log_2\,(50x) = 1 \ \Rightarrow\ 50x = 2 \ \Rightarrow\ x = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

b) $log\, \dfrac{x}{2} = log\, \dfrac{18}{x} \ \Rightarrow\ \dfrac{18}{x} = \dfrac{x}{2} \ \Rightarrow\ x^2 = 36 \ \Rightarrow\ x = 6$ ($x = -6$ no vale)

41 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x - y = 90 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 20 \\ e^{x-y} = 1/e \end{cases}$

a) Sumando las dos ecuaciones:

$2 \log x = 4 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

$\log y = 1 \Rightarrow y = 10$

Solución: $\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$

b) $x = 90 + y$

$\log (x y) = 3 \Rightarrow x y = 1\,000$

$(90 + y) y = 1\,000;\ \ 90y + y^2 = 1\,000;\ \ y^2 + 90y - 1\,000 = 0$

$y = \begin{cases} 10 \rightarrow x = 100 \\ -100 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$

c) $y = 10 - x$

$\log_2 \dfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y;\ \ y = 10 - 4y \Rightarrow y = 2,\ \ x = 8$

Solución: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{l} \ln (x y) = \ln 20 \Rightarrow x y = 20 \\ x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x(x + 1) = 20 \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{array}$

$x = \begin{cases} 4 \rightarrow y = 5 \\ -5 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

42 **Si un punto P recorre una circunferencia completa de radio 1, el ángulo de giro es 360° que, medido por el arco, equivale a 2π radianes.**

a) Teniendo en cuenta esta equivalencia, expresa en radianes los siguientes ángulos:

30° 45° 60° 90° 120° 135° 150° 210°

b) Expresa en grados estos ángulos medidos en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{4}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad 3\pi$$

a) $30° = \dfrac{\pi}{6}$ *rad* $\qquad 45° = \dfrac{\pi}{4}$ *rad*

$60° = \dfrac{\pi}{3}$ *rad* $\qquad 90° = \dfrac{\pi}{2}$ *rad*

$120° = \dfrac{2\pi}{3}$ *rad* $\qquad 135° = \dfrac{3\pi}{4}$ *rad*

$150° = \dfrac{5\pi}{6}$ *rad* $\qquad 210° = \dfrac{7\pi}{6}$ *rad*

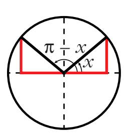
b) $\dfrac{5\pi}{6}$ *rad* $= 150°$ $\qquad \dfrac{7\pi}{4}$ *rad* $= 315°$

$\dfrac{4\pi}{3}$ *rad* $= 240°$ $\qquad \dfrac{5\pi}{2}$ *rad* $= 450°$

$3\pi = 540°$

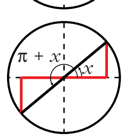
43 **Sobre la circunferencia de radio 1 señalamos un ángulo x en el primer cuadrante. A partir de él, dibujamos los ángulos $\pi - x$, $\pi + x$ y $2\pi - x$.**

Busca la relación que existe entre:

a) 

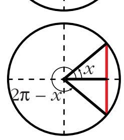
$\boldsymbol{sen(\pi - x)}$ **y** $\boldsymbol{sen\ x}$

$\boldsymbol{cos(\pi - x)}$ **y** $\boldsymbol{cos\ x}$

b) 

$\boldsymbol{sen(\pi + x)}$ **y** $\boldsymbol{sen\ x}$

$\boldsymbol{cos(\pi + x)}$ **y** $\boldsymbol{cos\ x}$

c) 

$\boldsymbol{sen(2\pi - x)}$ **y** $\boldsymbol{sen\ x}$

$\boldsymbol{cos(2\pi - x)}$ **y** $\boldsymbol{cos\ x}$

a) $sen\,(\pi - x) = sen\ x$

$cos\,(\pi - x) = -cos\ x$

b) $sen\,(\pi + x) = -sen\ x$

$cos\,(\pi + x) = -cos\ x$

c) $sen\,(2\pi - x) = -sen\ x$

$cos\,(2\pi - x) = cos\ x$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

44 **Con la calculadora puesta en "modo RAD" efectúa la siguiente secuencia:**

[cos] 0 [=] [cos] [=] [cos] [=] [cos] [=]…

[En los modelos de calculadora más antiguos la secuencia puede ser 0 [cos] [cos] [cos] [cos]…]. De este modo estás calculando …*cos*(*cos*(*cos*(*cos* 0))).

Si prosigues así sucesivamente tecleando [cos] [=], el número resultante llega a estabilizarse en 0,73908513. Es decir:

[cos] [0.73908513] [=] [0.73908513]

Expresa dicho resultado final mediante una sencilla igualdad y di de qué ecuación es solución el número 0,73908513 así obtenido.

El resultado se expresaría como:

$$\cos 0{,}73908513 = 0{,}73908513$$

Luego $x = 0{,}73908513$ es solución de la ecuación $\cos x = x$.

45 **De un número x sabemos que $\log \log x = 1$. ¿Cuántos libros se necesitan para escribirlo si cada libro tiene 500 hojas (1 000 páginas), cada página 50 renglones y cada renglón admite 100 caracteres?**

$$\log \log x = 1 \;\Rightarrow\; \log x = 10 \;\Rightarrow\; x = 10^{10}$$

1 libro $\rightarrow$ 1 000 páginas · 50 renglones · 100 caracteres = $5 \cdot 10^6$ caracteres

Para saber cuántos libros necesitaríamos, hemos de dividir:

$$\frac{10^{10}}{5 \cdot 10^6} = 2\,000 \text{ libros}$$